Grafika Komputerowa i Wizualizacja
Zadania i ćwiczenia

Jacek Cichoń
Politechnika Wrocławska, WPPT

Wrocław • 2014

1. Zadania teoretyczne

Zadanie 1

Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ będą gładkimi krzywymi.

1. Pokaż, że $\langle f(t), g(t)\rangle' = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle$.
2. Pokaż, że jeśli $||f(t)|| = const$, to $f(t) \perp f'(t)$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.
3. Załóżmy, że $n = 3$. Pokaż, że $(f(t) \times g(t))' = (f'(t) \times g(t)) + (f(t) \times g'(t))$.

Zadanie 2

Znajdź taką parametryzację $\phi(t)$ okręgu o równaniu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, że $||\phi'(t)|| = 1$. Pokaż, że dla dowolnej gładkiej parametryzacji φ tego okręgu mamy $\langle \varphi(t) - (a, b)^T, \varphi'(t)\rangle = 0$.

Zadanie 3

Załóżmy, że $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest taką transformacją afiniczną płaszczyzny, że $F(P_1) = P_1$, $F(P_2) = P_2$ i $F(P_3) = P_3$ dla pewnych trzech niewspółliniowych punktów. Pokaż, że $F = Id_{\mathbb{R}^2}$.

Zadanie 4

Niech $\{P_1, P_2, P_3\}$ oraz $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ będą dwoma zbiorami niewspółliniowych punktów $\mathbb{R}^2$. Pokaż, że istnieje dokładnie jedna transformacja afiniczna $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ taka, że $F(P_1) = Q_1$, $F(P_2) = Q_2$ i $F(P_3) = Q_3$.

Zadanie 5

Niech $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ będą puntami przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Pokaż, że zbiór

$$\{\sum_{j=1}^{k} t_j \cdot P_j : \sum_{j=1}^{k} t_j = 1 \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} (t_j \geqslant 0)\}$$

jest zbiorem wypukłym oraz domkniętym.

Zadanie 6

Niech $f(t) = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} t^k (1-t)^{3-k} P_k$ będzie krzywą Beziera z punktami kontrolnymi P_0, P_1, P_2, P_3. Pokaż, że $f'(0) = \overrightarrow{P_0P_1}$ oraz $f'(1) = \overrightarrow{P_2P_3}$

Zadanie 7

Zapisz w postaci

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

obrót względem punktu (a, b) o kąt α.

Zadanie 8

Pokaż, że przekrój dowolnej rodziny zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym. Pokaż, że przekrój dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

Zadanie 9

Zapisz w postaci notacji macierzowej (w postaci jednej macierzy 3×3) transformację afiniczną F, która przekształca prostokąt $[a, b] \times [c, d]$ na prostokąt $[e, f] \times [g, h]$. Odwzorowanie to ma spełniać następujące warunki: $F[(a, c)] = (e, h)$, $F[(b, c)] = (f, h)$ i $F[(a, d)] = (e, g)$. Potraktuj teraz funkcję F jako odwzorowanie z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$ i wyznacz jej Jakobian. Podaj interpretację geometryczną otrzymanego wyniku.

Zadanie 10

Niech $f(t) = (x_0 + v_x t, y_0 + v_y t + \frac{1}{2} a t^2)$. Oblicz $f'(t)$, $\|f'(t)\|$, $f''(t)$, $\|f''(t)\|$ oraz $f'''(t)$ i $\|f'''(t)\|$ oraz podaj interpretację fizyczną otrzymanych wyników (a w szczególności podaj interpretację liczb x_0, y_0, v_x, v_y i a).

Zadanie 11

Rozważmy czworokąt o wierzchołkach A, B, C i D. Pokaż, że czworokąt wyznaczony przez punkty środkowe jego krawędzi jest równoległobokiem.

Zadanie 12

Sumą Minkowskiego zbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór $A + B = \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}$. Niech $A = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ oraz $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant \frac{1}{4}\}$. Wyznacz zbiór $A + B$.

Zadanie 13

Napisz równanie ruchu dla wahadła matematycznego (chodzi tu o punkt materialny, zawieszony na nieważkiej, nierozciągliwej nici o ustalonej długości). Wykonaj linearyzację tego równania i „naszkicuj" fragment kodu odpowiedzialnego za symulację ruchu takiego wahadła.

Zadanie 14

Napisz w języku JavaScript funkcje testujące czy następujące dwie figury na płaszczyźnie się przecinają:

1. dwa okręgi o zadanych środkach i promieniach
2. dwa prostokąty o bokach równoległych do osi współrzędnych
3. dwie proste zadane równaniami ogólnymi (postaci $Ax + By + c = 0$)
4. dwa odcinki o zadanych końcach

Postaraj się napisać te funkcje możliwie optymalnie.

Zadanie 15

Niech M_x oznacza macierz obrotu względem osi OX o $90°$ oraz niech M_y oznacza macierz obrotu względem osi OY o $90°$.

1. Wyznacz macierze M_x i M_y
2. Wyznacz macierze $M_x \cdot M_y$ oraz $M_y \cdot M_x$
3. Pokaż, że $(M_x \cdot M_y)^3 = Id$

Zadanie 16

Niech $\vec{n}, \vec{k} \in \mathbb{R}^3$ będą dwoma wektorami takimi, że $\langle \vec{n}, \vec{k} \rangle \neq 0$. Niech $P \in \mathbb{R}^3$. Rozważmy płaszczyznę $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : \langle X - P, \vec{n} \rangle = 0\}$.

1. Napisz równania rzutu równoległego na płaszczyznę Π w kierunku $\vec{k}$.
2. Pokaż, że rzut ten jest transformacją afiniczną.
3. Jaki jest wyznacznik części liniowej tej transformacji?

Zadanie 17

Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie gładką funkcją. Niech $P = (x_0, y_0, z_0)$ będzie takim punktem, że $F(P) = 0$ oraz $(\nabla F)(P) \neq 0$. Pokaż, że wtedy wektor $(\nabla F)(P)$ jest prostopadły do płaszczyzny stycznej do zbioru $ker(F) = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ w punkcie P.
Uwaga: $(\nabla(F))(P) = [\frac{dF}{dx}(x_0, y_0, z_0), \frac{dF}{dy}(x_0, y_0, z_0), \frac{dF}{dz}(x_0, y_0, z_0)]$.

Zadanie 18

Promień światła leci wzdłuż półprostej o równaniu $(1-t, 1+2t, 1+t)(t \geqslant 0)$ i odbije się o płaszczyznę o równaniu $10x + 2z - 3z = 0$. Napisz równanie ruchy tego promienia po odbiciu się o tę płaszczyznę.

Zadanie 19

Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ rzutujemy centralnie z punktu $(0, 0, 0)$ na powierzchnię walca $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R\}$. Następnie, korzystając z mapowania $\Phi(u, v) = (R\cos(u), R\sin(u), v)$ powierzchnię tego walca przerzucamy na $\mathbb{R}^2$. Napisz równanie złożonego przekształcenia (tzn. wyznacz równanie odwzorowania $\Phi^{-1} \circ \Pi$, gdzie Π jest rzutem ma walec).

Zadanie 20

Wyznacz wektory normalne dla powierzchni zadanych równaniami:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
3. $z = x^2 + y^2$
4. $z = \sin(xy)$

Zadanie 21

Mamy dane trzy punkty $A, B, C \in \mathbb{R}^3$, punkt $P \in \mathbb{R}^3$ oraz wektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$. Wyznacz punkt przecięcia trójkąta $\triangle ABC$ z półprostą

$$l_+ = \{P + t \cdot \vec{r} : t \geqslant 0\} ,$$

o ile to przecięcie jest niepuste.

Zadanie 22

Rozwiąż następujące klasyczne zadanie optymalizacyjne:

> Niech $A = (0, a)$, $B = (1, b)$, gdzie $a, b > 0$. Znajdź takie $x \in \mathbb{R}$ aby suma długości odcinków $|AP_x| + |P_xB|$, gdzie $P_x = (x, 0)$, była najmniejsza.

Jaki ma związek to zadanie z ray-tracingiem?

Zadanie 23

Zapoznaj się pojęciem charakterystyki Eulera. Sprawdź ten wzór dla sześcianu, jakiejś triangulacji sfery i torusa.

2. Zadania programistyczne

1. HTML5 + JavaScript

Zadanie 1

Narysuj flagi Polski, Niemiec i Francji.

Zadanie 2

Oprogramuj swój ulubiony zegarek (analogowy lub cyfrowy lub binarny lub ???). Przykład takiego zegarka znajduje się na głównej stronie WWW wykładu.

Zadanie 3

Napisz symulator ruchu cząstki punktowej w centralnym polu grawitacyjnym. Możesz zastosować następujące równanie ruchu:

$$x''(t) = -\frac{x(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^{3/2}}, \quad y''(t) = -\frac{y(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^{3/2}}$$

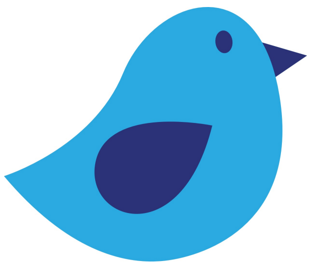
Parametry początkowe możesz ustawić następująco:

$$x(0) = 1.0, \quad y(0) = 0.0, \quad x'(0) = 0.0, \quad y'(0) = 1.0$$

Na stronie WWW wyświetlającej ten symulator oprogramuj przyciski służące do zmiany prędkości. Za pomocą parametru przeźroczystości α zasymuluj wyświetlanie śladu ruchu cząstki.

Zadanie 4

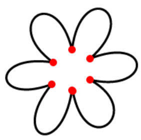
Narysuj za pomocą nie więcej niż 15 krzywych Beziera bądź odcinków następującą figurę i wyświetl ją następnie za na canvie.



Wskazówka: Zdefiniuj tę figurę w programie Incscape, a następnie przekonwertuj wygenerowany plik np. za pomocą serwisu http://www.professorcloud.com/svg-to-canvas/.

Zadanie 5

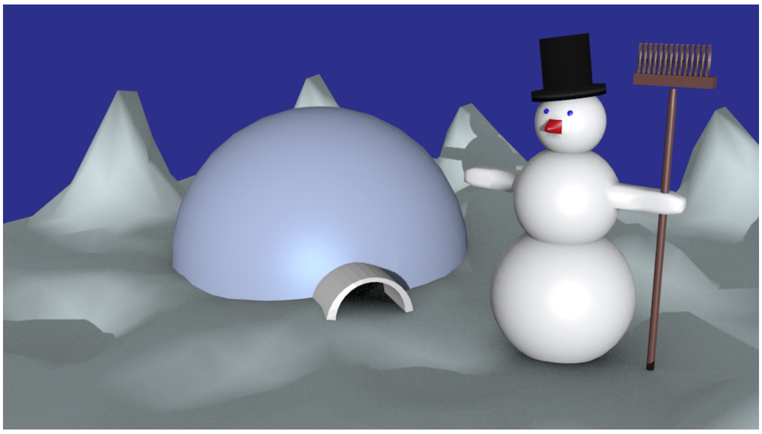
Wywołaj stronę „Krzywe Beziera” z głównej strony wykładu i przekształć umieszczony tam ciąg krzywych Beziera w mniej więcej następujący obrazek:



Wyeksportuj następnie punkty definiujące otrzymaną krzywą za pomocą polecenia JSON.stringify(points) wywołanej z konsoli swojej przeglądarki (w Chromie konsolę wywołać można za pomocą polecenia CTRL + Shift + J).

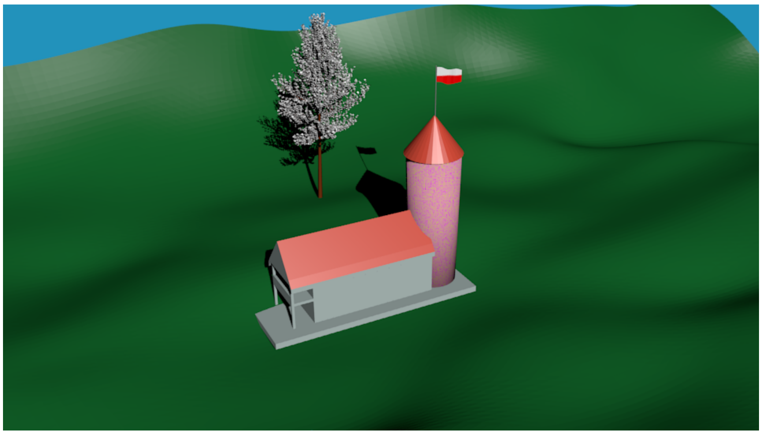
Zadanie 6

Zbuduj w Blenderze taką mniej więcej scenę:



Zadanie 7

Zbuduj w Blenderze mniej więcej taki budynek:



Uwaga: drzewka na razie można nie robić.

Zadanie 8

Zbuduj w Blenderze mniej więcej taką scenę:

Zadanie 9

Dowiedz się co to jest odwzorowanie Mercatora. Zbuduj w Blenderze model księżyca Ziemi.
Wskazówka: Mapę księżyca w projekcji Mercatora możesz znaleźć np. na stronie http://www.nhn.ou.edu/ jeffery/astro/moon/moon.html.

Zadanie 10

Na stronie WWW wykładu znajduje się link do strony z prostym ray-tracerem. Pobierz z tej strony obsługujące je dwa pliki (vector.js i RT.js). Przerób te kody na jakiś kompilowalny język **lub na język Python**.

Możesz, na przykład, przepisać ten kod na język C++. Do generowania grafiki możesz skorzystać z biblioteki SDL - powinny ci wystarczyć trzy funkcje SDL_Init(SDL_INIT_VIDEO), SDL_SetVideoMode(W, H, 32, SDL_HWSURFACE) oraz SDL_UpdateRect (no i pewnie para poleceń SDL_LockSurface oraz SDL_UnlockSurface). Do dobrania się do poszczególnych pikseli zastosować możesz wskaźniki typu Uint32*. Jeśli zdecydujesz się na język C++, to postaraj się profesjonalnie oprogramować klasę Vector implementującą podstawowe operacje na wektorach z $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 11

Zmodyfikuj kod ray-tracera ze strony WWW wykładu tak aby obsługiwał scenę złożoną z kilku trójkątów.

Zadanie 12

Pobierz ze strony wykładu plik SimpleSintel.blend. Znajdź w sieci teksturę oka zbliżoną do oka Sintel z filmu Sintel fundacji Blender. Nałóż ją na oczy Sintel. Pokoloruj bardziej nasyconymi kolorami ubranie Sintel.

Zadanie 13

Zrób choinkę z bombkami.

Zadanie 14

Zapoznaj się z materiałami Soni Kumari na temat modelowania sylwetki kobiety w Blenderze. Pierwszy poradnik znajdziesz pod adresem

`http://cgi.tutsplus.com/tutorials/female-character-modeling-in-blender-part-1--cms-19723`

Zadanie 15

Pobierz ze strony
`http://simpleanimations.blogspot.com/2012/07/characters-and-stuff.html`
plik 'Kara-model sheet' Davida Revoy'a.
Następnie:

1. pobierz ze strony `http://www.makehuman.org/` program MakeHuman
2. zbuduj w programie MakeHuman model osoby o sylwetce możliwie zbliżonej do Kary; ubierz go; dodaj oczy (low-poly) oraz zęby (teeth-base); nie dodawaj kości
3. wyeksportuj ten model do formatu Blender Exchange (.mhx)
4. wczytaj ten model do programu Blender, zlokalizuj elementy występujące w różnych warstwach
5. **spróbuj** dopasować wygenerowany model do sylwetki Kary
6. **spróbuj** zbudować buty (przydać ci się mogą następujące polecenie: duplikuj (shift+D), podziel (P); wytłocz (E) skaluj w kierunku normalnych (Alt+S)
7. **spróbuj** dodać włosy Karze i uczesz ją

Zadanie 16

ZADANIE DODATKOWE (nie robimy tego na ćwiczeniach; szczegóły omowię na wykładzie):

1. Zbuduj model prostego domku (może być to dom parterowy)
2. Zbuduj model kilku prostych drzew
3. Wyeksportuj te obiekty do formatu x3d
4. Zbuduj aplikację WWW, która pozwoli na wybieranie drzew i umieszczanie ich w otoczeniu domku

Celem jest zbudowanie aplikacji web'owej, która służyć może do projektowania ogrodów wokół domów. W zadaniu tym, ze względu na pracochłonność posługiwac się mamy tylko bardzo prostymi modelami (np. drzewa możmy zrobić z walca i sfery lub z walca i stożka itp.)

Powodzenia,
Jacek Cichoń