

Analiza Matematyczna I

przykładowe zadania na egzamin dla fizyków

Jacek Cichoń
Politechnika Wrocławska
WPPT

27 stycznia 2017

- Zadanie 1^a.** Wyznacz granicę ciągu $a_n = \frac{\ln(2^n+1)}{n}$.
- Zadanie 1^b.** Wyznacz granicę ciągu $a_n = \frac{\ln(e^n+1)+n}{n}$.
- Zadanie 1^c.** Wyznacz granicę ciągu $a_n = \frac{1+2n+(1+\frac{1}{2n})^n \cdot n^2}{1+n^2}$.
- Zadanie 1^d.** Oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$

Zadanie 2. Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = 1 + \frac{e^x}{x(x-2)}$$

Zadanie 2². Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{1 - x^2}$$

Zadanie 3^a. Rozważamy prostokąty o wierzchołkach w punktach $A = (0, 0)$, $B = (0, x)$, $C = (x, y)$ i $D = (0, y)$, gdzie $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$ oraz $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Który z tych prostokątów ma największą powierzchnię? Wyznacz ile ona wynosi.

Zadanie 3^b. Zaprojektuj otwarte od góry pudełko o kształcie prostopadłościanu o podstawie o bokach a i $2a$, którego objętość ma 1000 cm^3 i które ma najmniejszą powierzchnię (nie uwzględniamy ściany górnej)

Zadanie 4^a. Niech $f(x) = x^2 - 1$ oraz $g(x) = 1 - x - 2x^2$. Sporządź rysunek obszaru $S = \{(x, y) : f(x) \leq y \leq g(x)\}$ oraz oblicz jego powierzchnię.

Zadanie 4^b. Oblicz pole obszaru

$$C = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\pi \wedge \cos(x) \leq y \leq \sin(x)\} .$$

Zadanie 5^a. Wyznacz następującą całkę nieoznaczoną $\int x(e^x + \ln(x))dx$.

Zadanie 5^b. Stosując podstawienie $x = t^4$ oblicz całkę $\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} dx$.

Zadanie 5^c. Niech $a > 0$. Wyznacz całkę $\int_0^{\frac{\pi}{a}} x^2 \sin(ax) dx$. Wskazówka: zastosuj najpierw podstawienie $u = ax$ i następnie zastosuj podwójnie metodę całkowania przez części.

Zadanie 6^a. Wyznacz promień zbieżności szeregu potęgowego

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 1} x^n$$

oraz oblicz $f'(0)$.

Zadanie 6^b. Wyznacz promień zbieżności szeregu potęgowego

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n 2^n x^n$$

oraz oblicz $f(\frac{1}{4})$.