# Algebra Abstrakcyjna i Teoria Kodowania

Egzamin - termin II
Zadania oraz ich przykładowe rozwiązania

Jacek Cichoń
Politechnika Wrocławska
WPPT

11 lipca 2017

Podane rozwiązania są przykładowe - każde zadanie można (oczywiście) rozwiązać na wiele sposobów. Taka ogólna uwaga: przed podaniem końcowej odpowiedzi powinniście sprawdzić, czy znalezione rozwiązanie jest prawidłowe (np. w brudnopisie).

**Zadanie 1.** Czy grupy $(Z_{13})^*$ oraz $C_2 \times C_6$ są izomorficzne?

*Rozwiązanie.* Liczba 13 jest pierwsza, więc grupa $(Z_{13})^*$ ma generator, więc w grupie $(Z_{13})^*$ mamy element rzędu 12. W grupie $C_2 \times C_6$ mamy

$$\underbrace{(x,y)+\ldots+(x,y)}_{6} = (\underbrace{x+\ldots+x}_{6}, \underbrace{y+\ldots+y}_{6}) = (0,0)$$

więc $rank(a) \leq 6$ dla każdego $a \in C_2 \times C_6$. Zatem grupy te nie są izomorficzne. □

**Zadanie 2.** Oblicz $12345678910987654321 \mod 9$.

*Rozwiązanie.* Korzystając z z tego, że $10^k \equiv_9 1$ dla dowolnego naturalnego $k$ mamy:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \equiv_9 \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Więc

$$12345678910987654321 \equiv_9 1+2+3+4+5+6+7+8+9+1+0+$$
$$9+8+7+6+5+4+3+2+1 =$$
$$2\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8+9)+1 = 90+1 = 91 \equiv_9 1.$$

Uwaga: Jeśli ktoś rozwiązał to zadanie wykonując *ręczne dzielenie* i otrzymał poprawny wynik, to otrzymał jeden punkt - podejście to świadczy, że zachowało się wiedzę ze szkoły średniej, ale niczego się nie nauczyło na wykładzie. □

**Zadanie 3.** Znajdź najmniejszą liczbę naturalną $x$ taką, że

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 1000 \\ x \equiv 2 \mod 1001 \end{cases}$$

*Rozwiązanie.* Mamy $nwd(1000, 1001) = 1$, więc, na mocy Chińskiego Twierdzenia o Resztach istnieje dokładnie jedno takie $x$ w zbiorze $\{0, \ldots, 1000 \cdot 1001 - 1\}$. Mamy $1 \cdot 1001 + (-1) \cdot 1000 = 1$. Kładziemy

$$x_0 = 1 \cdot 1001 \cdot 1 + (-1) \cdot 1000 \cdot 2 = 1001 - 2000 = -999.$$

Jest to liczba ujemna. Dodajemy do niej liczbę $1000 * 1001$. Otrzymujemy $x = 1000001$. Jest to liczba ze zbioru $\{0, \ldots, 1000 \cdot 1001 - 1\}$. Zatem jest to szukana liczba. $\square$

**Zadanie 4.** Niech $K$ będzie rozszerzeniem ciała $\mathbb{Z}_2$ o taki element $j$, że $j^3 + j + 1 = 0$. Rozwiąż w ciele $K$ układ równań

$$\begin{cases} jx + y = 1 \\ x + y = j^2 \end{cases}$$

*Rozwiązanie.* Dodając oba równania otrzymujemy $(j + 1)x = 1 + j^2$. Mnożymy to równanie przez $j + j^2$ otrzymujemy $x = 1 + j$. Z drugiego równania otrzymujemy

$$y = 1 + j + j^2$$

Rozwiązaniem jest więc para $(x, y) = (1 + j, 1 + j + j^2)$. $\square$

**Zadanie 5.** Niech $n$ będzie liczbą naturalną. Pokaż, że $n|\phi(n^2)$.

*Rozwiązanie.* Dla $n = 1$ teza jest oczywiście prawdziwa. Załóżmy więc, że $n \geq 2$. Niech $n = \prod_{p|n} p^{\alpha_n(p)}$. Wtedy

$$\phi(n^2) = \phi(\prod_{p|n} p^{2\alpha_n(p)}) = \prod_{p|n} p^{2\alpha_n(p)-1}(p-1) =$$
$$\prod_{p|n} p^{\alpha_n(p)} \cdot \prod_{p|n} p^{\alpha_n(p)-1}(p-1) = n \cdot \prod_{p|n} p^{\alpha_n(p)-1}(p-1) \ .$$

UWAGA: Po przyjrzeniu się temu rozwiązaniu, widzimy, że otrzymaliśmy więcej: mianowicie pokazaliśmy, że mamy $\phi(n^2) = n\phi(n)$. Jesli ktoś to zauważył, to otrzymał dodatkowe punkty. $\square$