Analiza Matematyczna II

Egzamin - termin I

Zadania oraz ich przykładowe rozwiązania

Jacek Cichoń
Politechnika Wrocławska
WPPT

28 czerwca 2017

Zadanie 1. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$. Wyznacz wnętrze $int(A)$, domknięcie $cl(A)$ oraz brzeg $br(A)$.

Rozwiązanie. W każdym kole istnieje punkt o obu współrzędnych niewymiernych. Zatem $int(A) = \emptyset$. Niech $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Zbiór B jest domknięty, $A \subseteq B$ oraz każda kulka o środku w punkcie ze zbioru B zawiera jakiś punkt ze zbioru A. Zatem $cl(A) = B$. Zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus A$ jest gęsty w $\mathbb{R}^2$ (w każdej kulce jest punkt o obu współrzędnych niewymiernych). Zatem

$$br(A) = cl(\mathbb{R}^2 \setminus A) \cap cl(A) = \mathbb{R}^2 \cap B = B \ .$$

$\square$

Zadanie 2. Niech

$$a_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k, \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n \right) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Wyznacz punkty skupienia ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} (-\frac{1}{2})^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^k = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \ .$$

oraz $\lim_n \left(1 + \frac{(-1)^{2n}}{2n}\right)^{2n} = e$ i $\lim_n \left(1 + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right)^{2n+1} = \frac{1}{e}$. Zatem $\lim_n a_{2n} = (\frac{2}{3}, e)$ oraz $\lim_n a_{2n+1} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{e})$. Punktami skupienia ciągu (a_n) są więc punkty $(\frac{2}{3}, e)$ oraz $(\frac{2}{3}, \frac{1}{e})$. $\square$

Zadanie 3. Niech $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 4y + 2$. Wyznacz ekstrema funkcji f.

Rozwiązanie. Mamy $\nabla f(x,y) = (4x, 4+4y)$. Jedynym punktem stacjonarnym funkcji f jest więc punkt $(0,-1)$. Hesjan funkcji f jest równy

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ponieważ $4 > 0$ oraz $\det(H) = 16 > 0$, więc f ma minimum lokalne w punkcie $(0,-1)$. Rozwijając funkcję f w punkcie $(0,-1)$ mamy $f(0+r, -1+s) = 2(r^2+s^2)$. Zatem $f(x,y) \geq 0$ dla dowolnych $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Zatem f ma globalne minimum w punkcie $(0,-1)$. Ponadto $f(0,-1) = 0$.
UWAGA: Do tego samego wniosku można było dojść, bez wykonywania prawie żadnych rachunków, jeśli się zauważyło, że $f(x,y) = 2x^2 + 2(y+1)^2$. □

Zadanie 4. Wyznacz największą oraz najmniejszą wartość funkcji $f(x,y) = x + y^2$ na zbiorze

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \wedge 0 \leq y \wedge x + y < 1\} \ .$$

Rozwiązanie. Mamy $\nabla f(x,y) = (1, 2y)$, zatem f nie ma punktów stacjonarnych. Zatem f nie ma ekstremów we wnętrzu zbioru A.

Na zbiorze $[0,1) \times \{0\}$ mamy $f(x,0) = x$. Najmniejsza wartość jest przyjmowana w punkcie $(0,0)$. W żadnym punkcie tego zbioru nie przyjmuje wartości największej.

Na zbiorze $\{0\} \times [0,1)$ mamy $f(0,y) = y^2$. Najmniejsza wartość jest przyjmowana w punkcie $(0,0)$. W żadnym punkcie tego zbioru nie przyjmuje wartości największej.

Zatem, funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość w punkcie $(0,0)$ oraz nie przyjmuje największej wartości w żadnym punkcie zbioru A. □

Zadanie 5. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \times [0,1]$. Oblicz

$$\iiint\limits_A (x^2 + y^2) \cdot z^2 dxdydz \ .$$

Rozwiązanie. Niech $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z^2$. Rozważamy współrzędne cylindryczne: $\Phi(r, \phi, r) = (r\cos(\phi), r\sin(\phi), z)$ oraz zbiór $\Omega = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, 1]$. Mamy $\Phi(\Omega) = A$ oraz wiemy, że $\det(J_\Phi) = r$. Zatem

$$\iiint_A f(x, y, z)dxdydz = \iiint_\Omega r \cdot (f \circ \Phi)(r, \phi, z)drd\phi dz =$$
$$\iiint_\Omega r \cdot r^2 \cdot z^2 drd\phi dz =$$
$$\int_0^1 \left(\left(\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 z^2 dz \right) d\phi \right) dr = \ldots = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{6} \ .$$

□

Zadanie 6. Znajdź największą wartość funkcji $f(x, y, z) = xyz$ na zbiorze tych $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, że
$$x + 2y + 3z = 1 \ .$$

Rozwiązanie. Niech $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 1\}$. Niech $P_n = (-n, -n, \frac{1}{3} + n)$. Zauważmy, że punkty P_n należą do zbioru Π. Ponadto $f(P_n) = n^2(\frac{1}{3} + n)$. Zatem $\lim_n f(P_n) = \infty$. Więc f nie przyjmuje wartości największej na zbiorze Π.

UWAGA: Jeśli ktoś zastosował metodę mnożników Lagrange'a i doszedł to tego, że na zbiorze $[0, \infty)^3 \times \Pi$ maksimum jest przyjmowane w punkcie $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9})$, to otrzyma dodatkowe punkty. □