Algebra z Geometrią Analityczną
Informatyka, WPPT
Lista zadań

Jacek Cichoń,
Wrocław, 2017/18

1 Podstawowe struktury algebraiczne

Zadanie 1 — Na zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ określamy działanie $x \star y = \frac{x+y}{2}$. Czy jest do działanie przemienne? Czy jest ono łączne? Czy istnieje element neutralny dla tego działania w zbiorze $\mathbb{R}$?

Zadanie 2 — Na zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ określamy działanie $x \vee y = \max(x, y)$. Czy jest to działanie łączne? Czy jest ono przemienne? Sformułuj i rozwiąż podobne zadanie dla operacji $x \wedge y = \min(x, y)$.

Zadanie 3 — Na zbiorze $(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ określamy działanie wzorem

$$(n, x) \oplus (m, y) = \left(n + m, \frac{nx + my}{n + m}\right) .$$

1. Pokaż, że działanie $\oplus$ jest łączne i przemienne.
2. Pokaż, że $(1, x_1) \oplus (1, x_2) \oplus \ldots \oplus (1, x_n) = \left(n, \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)$.

1.1 Grupy

Zadanie 4 — Które z następujących struktur algebraicznych są grupami: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$, $((0, \infty), \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$?

Zadanie 5 — Wyznacz tabliczki działań dla grup $\mathbb{C}_5$ oraz $\mathbf{S}_3$. Wyznacz dla tych grup tabliczki działania x^{-1}.

Rzędem elementu g w grupie $(G, \cdot)$ z elementem neutralnym e nazywamy najmniejszą liczbę naturalną $k \geq 1$ taką, że $g^k = e$ (lub ∞, jeśli takiej liczby k nie ma). Liczbę tę oznaczamy symbolem $\mathrm{ord}(g)$.

Zadanie 6 — Wyznacz rzędy wszystkich elementów w grupie $\mathbb{C}_{12}$. Sformułuj jakąś rozsądną hipotezę o rzędach elementów w grupie.

Zadanie 7 — Wyznacz rzędy wszystkich elementów w grupach $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $((0, \infty), \cdot)$.

Zadanie 8 — Niech $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ oraz $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Oblicz π^{-1} oraz σ^{-1}.
2. Oblicz $\pi \circ \sigma$ oraz $\sigma \circ \pi$.
3. Oblicz $(\pi \circ \sigma)^{-1}$ oraz $(\sigma \circ \pi)^{-1}$.

4. Znajdź takie permutacje $x, y \in \mathbf{S}_5$, że $\pi \circ x = \sigma$ oraz $y \circ \pi = \sigma$.
5. Wyznacz rzędy permutacji σ oraz π w grupie $\mathbf{S}_5$.

Zadanie 9 — Scharakteryzuj te elementy x grupy G, że $\operatorname{ord}(x) = 1$.

Zadanie 10 — Załóżmy, że element a grupy G ma rząd równy $n \in \mathbb{N}$.

1. Pokaż, że dla dowolnej liczby naturalnej k istnieje taka liczba $l \in \{0, \dots, n-1\}$, że $a^k = a^l$.
2. Pokaż, że wszystkie elementy $\{a^0, a^1, \dots, a^{n-1}\}$ są parami różne.
3. Pokaż, że $a^{n-1} = a^{-1}$

Zadanie 11 — Załóżmy, że element a grupy G ma rząd nieskończony. Pokaż, że wszystkie potęgi a^k ($k \in \mathbb{Z}$) są parami różne.

Zadanie 12 — Pokaż, że grupy $(\{-1, 1\}, \cdot)$ oraz $\mathbb{C}_2$ są izomorficzne.

Zadanie 13 — Pokaż, że grupy $(\mathbb{R}, +)$ oraz $((0, +\infty), \cdot)$ są izomorficzne.

Zadanie 14 — Pokaż, że dowolne dwie grupy trójelementowe są izomorficzne.

Zadanie 15 — Niech $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ i $\mathcal{H} = (H, \star)$ będą grupami oraz niech $f : G \to H$ będzie homomorfizmem z grupy $\mathcal{G}$ w grupę $\mathcal{H}$.

1. Niech e_G będzie elementem neutralnym grupy $\mathcal{G}$ oraz niech e_H będzie elementem neutralnym grupy $\mathcal{H}$. Pokaż, że $f(e_G) = e_H$.
2. Pokaż, że $(\forall x \in G)(f(x^{-1}) = f(x)^{-1})$.
3. Pokaż, że jeśli f jest izomorfizmem, to odwzorowanie f^{-1} jest izomorfizmem grup $\mathcal{H}$ i $\mathcal{G}$.
4. Pokaż, że jeśli f jest izomorfizmem, to dla dowolnego $x \in G$ mamy $\operatorname{ord}(x) = \operatorname{ord}(f(x))$.

Zadanie 16 — Wskaż dwie nieizomorficzne grupy cztero-elementowe.

Zadanie 17 — Niech f będzie homomorfizm z grupy $\mathcal{G}_1$ w grupę $\mathcal{G}_2$ oraz niech g będzie homomorfizmem z grupy $\mathcal{G}_2$ w $\mathcal{G}_3$.

1. Pokaż, że złożenie $g \circ f$ jest homomorfizmem z grupy $\mathcal{G}_1$ w grupę $\mathcal{G}_3$.
2. Pokaż, że jeśli f i g są monomorfizmami, to $g \circ f$ jest monomorfizmem.
3. Pokaż, że jeśli f i g są epimorfizmami, to $g \circ f$ jest epimorfizmem.
4. Pokaż, że jeśli f i g są izomorfizmami, to $g \circ f$ jest izomorfizmem.

Zadanie 18 — Pokaż, że jeśli w grupie $(G, \cdot)$ z elementem neutralnym e mamy $(\forall g \in G)(g \cdot g = e)$, to grupa ta jest **abelowa**.

Zadanie 19 — Niech $\mathcal{G}$ będzie dowolną grupą oraz niech $\mathcal{E} = (\{e\}, \cdot)$ będzie grupą jednoelementową. Pokaż, że grupa $\mathcal{G} \times \mathcal{E}$ jest izomorficzna z grupą $\mathcal{E}$.

Zadanie 20 —

1. Pokaż, że grupy $\mathbb{C}_4$ oraz $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$ nie są izomorficzne.
2. Pokaż, że jeśli G jest grupą cztero-elementową to G jest izomorficzna z grupą $\mathbb{C}_4$ lub z grupą $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$.
3. Pokaż, że grupa $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$ nie jest izomorficzna z grupą $\mathbb{C}_8$.

Zadanie 21 — Wyznacz rzędy wszystkich elementów w grupie $C_2 \times \mathbb{Z}$.

Zadanie 22 — Podaj przykład grupy skończonej i przemiennej, skończonej i nieprzemiennej, nieskończonej i przemiennej, nieskończonej i nieprzemiennej. Uzasadnij, że istnieje nieskończenie wiele parami nieizomorficznych grup abelowych. Uzasadnij, że istnieje nieskończenie wiele parami nieizomorficznych grup nieabelowych.

1.2 Pierścienie i ciała

Zadanie 23 — Które z następujących struktur algebraicznych są pierścieniami, a które ciałami: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$?

Zadanie 24 — Napisz w dowolnym znanym Ci języku programowania procedurę, która dla danego $n \in \mathbb{N}$ generuje tabliczki dodawania i tabliczki mnożenia dla pierścienia $\mathbb{Z}_n$.

1. Wyznacz tabliczki mnożeń dla pierścieni $\mathbb{Z}_5$ oraz $\mathbb{Z}_6$.
2. Zwróć uwagę na podobieństwa oraz różnice między nimi.
3. Pokaż, że $\mathbb{Z}_5^* \cong C_4$.

Zadanie 25 — Rozwiąż w ciałach $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ oraz $\mathbb{Z}_{11}$ następujące równania:

1. $2x = 3$
2. $2x + 3 = 1$
3. $2x + 4 = 1$

Zadanie 26 — Rozwiąż w ciałach $\mathbb{Z}_5$ oraz $\mathbb{Z}_7$ następujące układy równań:

1. $\begin{cases} x + 2y &= 3 \\ 2x + 3y &= 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y &= 3 \\ 3x + y &= 1 \end{cases}$

Zadanie 27 — Rozwiąż w ciele $\mathbb{Z}_{17}$ następujące równania:

1. $x^2 + 5x + 1 = 0$,
2. $x^2 + 3x + 1 = 0$,
3. $x^2 + 13x + 4 = 0$.

Zadanie 28 — Niech $(R, +, \cdot)$ będzie pierścieniem przemiennym. Pokaż, że dla dowolnych $x, y \in R$ mamy:

1. $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$,
2. $(x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$,
3. $(x + y)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + y^3$.

Uwaga: Przez $2 \cdot x$ rozumiemy $x + x$ a przez $3 \cdot x$ rozumiemy element $x + x + x$.

Zadanie 29 — Pokaż, że w ciele $\mathbb{Z}_3$ mamy $(x + y)^3 = x^3 + y^3$ oraz, że w ciele $\mathbb{Z}_5$ mamy $(x + y)^5 = x^5 + y^5$.

Zadanie 30 — Niech $(K, +, \cdot)$ będzie ciałem, $x \in K \setminus \{1_K\}$ oraz niech $n \geq 1$ będzie liczba naturalną. Pokaż, że

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} .$$

Zadanie 31 — Pokaż, że dowolne dwa ciała dwuelementowe są izomorficzne.

Zadanie 32 — Niech $\mathcal{R}_1 = (X_1, +_1, \star_1)$ i $\mathcal{R}_2 = (X_2, +_2, \star_2)$. Na zbiorze $X_1 \times X_2$ definiujemy działania $(x, y) + (u, v) = (x +_1 u, y +_2 v)$ oraz $(x, y) \star (u, v) = (x \star_1 u, y \star_2 v)$.

1. Pokaż, że struktura algebraiczna $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 = (X_1 \times X_2, +, \star)$ jest pierścieniem.
2. Pokaż, że funkcja $f : X_1 \times X_2 \to X_1$ określona wzorem $f((x, y)) = x$ jest epimorfizmem z $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ na $\mathcal{R}_1$.
3. Pokaż, że funkcja $f : X_1 \to X_1 \times X_2$ określona wzorem $f(x) = (x, 0_2)$ (gdzie 0_2 oznacza element neutralny względem dodawania w pierścieniu $\mathcal{R}_2$) jest monomorfizmem z $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ na $\mathcal{R}_1$.

Zadanie 33 — Niech $\mathcal{R} = (X, +, \cdot)$ będzie pierścieniem. Pokaż, że funkcja $f : X \to X \times X$ okreslona wzorem $f(x) = (x, x)$ jest monomorfizmem z pierścienia $\mathcal{R}$ w pierścień $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$.

Zadanie 34 — Niech f będzie homomorfizmem z pierścienia $R_1 = (X, +, \cdot)$ w pierścień $\mathcal{R}_2$. Pokaż, że zbiór $\{f(x) : x \in X\}$ z działaniami odziedziczonymi z pierścienia R_2 jest podpierścieniem pierścienia $\mathcal{R}_2$.

Zadanie 35 — Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Definiujemy funkcję $\phi_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ wzorem

$$\phi_n(x) = x \mod n\ .$$

Pokaż, że ϕ_n jest epimorfizmem z $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{Z}_n$.

2 Liczby całkowite

Zadanie 36 — Udowodnij, stosując metodę indukcji matematycznej, następujące fakty:

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$,
2. $(\forall n \geq 3)(n^2 \geq 2n + 1)$,
3. $(\forall n \geq 4)(2^n \geq n^2)$,
4. $(\forall n \geq 4)(n! \geq 2^n)$,
5. $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$.

Zadanie 37 — Pokaż, że grupa $\mathbf{S}_n$ na $n!$ elementów.

Zadanie 38 — Liczby Fibonacciego (F_n) definiujemy następująco: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ dla $n \geq 0$.

1. Pokaż, że $\sum\limits_{i=0}^{n} F_n = F_{n+1} - 1$.
2. Pokaż, że $(\forall n \geq 1)(F_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2})$.
3. Pokaż, że $\sum\limits_{i=0}^{n} F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

Zadanie 39 — (Algorytm Euklidesa) Napisz, w dowolnym znanym Ci języku programowania, funkcję, która dla zadanych dodatnich liczb naturalnych a, b wyznacza $\mathrm{NWD}(a, b)$.

Zadanie 40 — (Rozszerzony Algorytm Euklidesa) Napisz, w dowolnym znanym Ci języku programowania, procedurę, która dla zadanych dodatnich liczb naturalnych a, b wyznacza liczby całkowite X, Y takie, że $a \cdot x + b \cdot Y = \mathrm{NWD}(a, b)$.

Zadanie 41 — Oblicz, stosując algorytm Euklidesa, NWD oraz NWW dla następujących par liczb naturalnych: $(12, 40)$, $(11, 17)$, $(570, 348)$, $(12345, 67890)$. Dla każdej z tych par liczb (a, b) znajdź takie liczby całkowite X, Y, takie, że $aX + bY = \mathrm{NWD}(a, b)$.

Zadanie 42 — Oblicz, stosując rozkład liczb na czynniki pierwsze, NWD oraz NWW dla następujących par liczb naturalnych: $(12, 40)$, $(11, 17)$, $(570, 348)$, $(12345, 67890)$.

Zadanie 43 — Wyznacz wszystkie rozwiązania w liczbach całkowitych następujących równań:

1. $3 \cdot x + 5 \cdot y = 1$,
2. $2 \cdot x + 5 \cdot y = 4$,
3. $2 \cdot x + 6 \cdot y = 3$.

Zadanie 44 — Znajdź wszystkie pary (n, m) liczb naturalnych takich, że $\mathrm{NWD}(n, m) = 18$ oraz $\mathrm{NWW}(n, m) = 108$.

Zadanie 45 — Pokaż, że $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathrm{NWD}(n, n + 1) = 1)$.

Zadanie 46 — Niech $F_0, F_1, F_2, \ldots$ będą liczbami Fibonacciego. Pokaż, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy $\mathrm{NWD}(F_n, F_{n+1}) = 1$.
Wskazówka: Zastosuj metodę indukcji matematycznej; skorzystaj z tego, że $\mathrm{NWD}(a, b) = \mathrm{NWD}(a - b, b)$ dla $a > b$.

Zadanie 47 — Dla $x, y \in \mathbb{N}^+$ określamy $x \wedge y = \mathrm{NWD}(x, y)$. Pokaż, że operacja ta jest przemienna i łączna. Sformułuj i udowodnij analogiczne twierdzenie dla najmniejszej wspólnej wielokrotności. Jak własności te możesz wykorzystać do napisania funkcji która dla danej listy $[a_0, \ldots, a_n]$ dodatnich liczb naturalnych wyznacza ish największy wspólny dzielnik.

Zadanie 48 — Niech $n \geq 1$ oraz niech $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ będzie takim zbiorem, że $|S| \geq n + 1$. Pokaż, że istnieją dwie różne liczby $a, b \in S$ takie, że $a|b$.
Wskazówka: Rozważ funkcję przyporządkowującą liczbie a największą liczbę nieparzystą dzielącą a.

Zadanie 49 — Niech $C(n) = |\{(a, b) : 1 \leq a, b \leq n \wedge \mathrm{NWD}(a, b) = 1\}|$. Narysuj wykres funkcji $f(n) = C(n) \cdot n^{-2}$ dla $n = 1, \ldots 100$. Postaw rozsądną hipotezę o $\lim_n f(n)$.
Uwaga: To zadanie powinno się również pojawić na liście zadań ze Wstępu do Informatyki.

2.1 Liczby pierwsze

Zadanie 50 — Niech $f(n) = n^2 + n + 41$. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną n taką, że $f(n)$ nie jest liczbą pierwszą. Wskazówka: Wszystkie poprawne metody są dozwolone..
Uwaga: Jest to wielomian, który odkrył Euler w roku 1772.

Zadanie 51 — Znajdź taką liczbę naturalną n, że $n! + 1$ nie jest liczbą pierwszą.

Zadanie 52 — Niech $p_1, p_2, p_3, \ldots$ będzie monotoniczną numeracją wszystkich liczb pierwszych. Czy prawdziwe jest następujące zdanie: dla każdego $n \geq 1$ liczba $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$ jest liczbą pierwszą?

Zadanie 53 —

1. Znajdź najmniejszą liczbę pierwszą większą od 100, 1000, 2000.
2. Znajdź najmniejszą liczbę pierwszą większą od 2000.
3. Znajdź najmniejszą liczbę pierwszą większą od 10^6.
4. Pokaż, w dowolny sposób, że liczba 12345678910987654321 jest pierwsza.

Zadanie 54 — Oprogramuj funkcją $\pi(x) = |\{n \in \mathbb{N} : n \leq x \wedge n \,\text{jest pierwsza}\}|$. Narysuj wykres

funkcji $f(n) = \pi(n)(\frac{n}{\ln n})^{-1}$ dla $n \in \{2, \ldots, 10^5\}$. Dowiedz się o dokładności aproksymacji z Twierdzenia o Liczbach Pierwszych.
Uwaga: To zadanie powinno się również pojawić na liście zadań ze Wstępu do Informatyki.

* **Zadanie 55 —** Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Pokaż, że liczba p dzieli licznik ułamka

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

Wskazówka: Pogrupuj odpowiednio ułamki.

Zadanie 56 — Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Pokaż, że

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}_p^*} x = \sum_{x \in \mathbb{Z}_p^*} x^{-1} = 0 \, .$$

Zadanie 57 — Pokaż, że charakterystyka dowolnego ciała jest równa zero lub jest liczbą pierwszą.

3 Liczby zespolone

3.1 Podstawowe własności

Zadanie 58 — Niech $a = 2 + 3i$ oraz $b = 1 - i$.

1. Oblicz $a + b$, $a - b$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$
2. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej wszystkie powyższe liczby.
3. Oblicz $\overline{a}$, $\overline{b}$, $|a|$, $|b|$.

Zadanie 59 — Pokaż, że mnożenie liczb zespolonych jest przemienne i łączne.

Zadanie 60 — Rozwiąż w ciele liczb zespolonych następujące równania:

1. $(1 + i) \cdot (2 + z) = 3i$,
2. $(2 + i) \cdot (1 + 2z) = 3 + i$

Zadanie 61 — Rozwiąż w ciele liczb zespolonych następujące układy równań:

1. $\begin{cases} x + 2iy & = 3 \\ ix + 3y & = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} ix + y & = 1 + i \\ 3x + 2y & = i \end{cases}$

Zadanie 62 — Rozwiąż w ciele liczb zespolonych następujące równania:

1. $z^2 = -3$,
2. $z^2 + z + 1 = 0$

Zadanie 63 — Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Pokaż, że

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
4. $z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2$

Zadanie 64 — Pokaż, że jeśli $|z| = 1$ to $z^{-1} = \overline{z}$.

Zadanie 65 — Pokaż, że jeśli $|z| = 1$ to $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$.

Zadanie 66 — Naszkicuj następujące zbiory:

1. $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| = 1\}$,
2. $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| < 1\}$,
3. $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| \geq 2\}$,
4. $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z - 1| \leq 1\}$,
5. $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z - i|\}$.

Zadanie 67 — Wyznacz następujące zbiory:

1. $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z) > 0\}$
2. $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = 9\}$
3. $\{z \in \mathbb{C} : |z^2 - i| = |z^2 + i|\}$
4. $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) = 1 \wedge |z| = 3\}$
5. $\{z \in \mathbb{C} : z^2 + \overline{z}^2 = 1\}$.

Zadanie 68 — Pokaż, że dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mamy

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \ .$$

Zadanie 69 — Nad ciałem $\mathbb{Z}_3$ budujemy „zbiór liczb zespolonych modulo 3”: na zbiorze par $K = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ określamy działania $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$ oraz $(a, b)\cdot(c, d) = (ac-bd, ad+bc)$ (działania $+$ i $\cdot$ wewnątrz par oznaczają działania modulo 3). Pokaż, że struktura $(K, +, \cdot)$ jest dziewięcio-elementowym ciałem.

1. W grupie $(K, +)$ wyznacz rzędy elementów $(1, 0)$ i $(1, 2)$.
2. W grupie $(K \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$ wyznacz rzędy elementów $(0, 1)$ i $(1, 1)$.
3. Wyznacz charakterystykę ciała K.
4. Dlaczego ta sama konstrukcja zastosowana do ciała $\mathbb{Z}_5$ nie daje ciała?
5. Uzasadnij, że po zastosowaniu tej konstrukcji do ciała $\mathbb{Z}_{11}$ otrzymamy ciało o 121 elementach.

Zadanie 70 — Niech $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Pokaż, że $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ jest pierścieniem
2. Wyznacz elementy odwracalne w $\mathbb{Z}[i]$, tzn. znajdź takie liczby $x \in \mathbb{Z}[i]$, że istnieje $y \in \mathbb{Z}[i]$, taki że $x \cdot y = 1$.

Uwaga: Rozważany pierścień nazywa się pierścieniem liczb Gaussa.

3.2 Postać trygonometryczna liczb zespolonych

Zadanie 71 — Przedstaw w postaci trygonometrycznej następujące liczby: 2, $3i$, $1+i$, $-i$, $1-i$, $\sqrt{2}-i$, $5 - 5i$.

Zadanie 72 — Oblicz $(1 + i)^{10}$, $\left(\frac{5+7i}{1-6i}\right)^{11}$, $(\sqrt{3} + i)^{12}$.

Zadanie 73 — Wyznacz moduły i argumenty główne następujących liczb: $\frac{(1+i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^8}$, $\frac{(1+i\sqrt{3})^{10}}{(1-i)^5}$.

Zadanie 74 — Wyznacz wszystkie takie liczby zespolone $z \in \mathbb{C}$, że $z^2 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 75 — Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyraź $\cos(4t)$ za pomocą funkcji $\cos(t)$. Wywnioskuj z otrzymanego wzoru, że

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}, \quad \cos\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

Zadanie 76 — Oblicz sumę $1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{10}$.

Zadanie 77 — Wyznacz następujące pierwiastki: $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[4]{i}$, $\sqrt[4]{8(\sqrt{3}-i)}$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[2]{1+i}$.

Zadanie 78 — Rozwiąż następujące równania

1. $iz^2 + z + i = 0$,
2. $iz^2 + z + 1 = 0$.

Zadanie 79 — Znajdź takie liczby $z \in \mathbb{C}$, że $z^5 = 1$ oraz $z^7 = 1$.

* **Zadanie 80 —** Na wszystkich bokach równoległoboku zbudowano zewnętrzne kwadraty. Pokaż, że środki tych kwadratów tworzą kwadrat.

Zadanie 81 — Załóżmy, że z jest taką liczbą zespoloną, że $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\frac{\pi}{100})$. Oblicz $z^{100} + \frac{1}{z^{100}}$.
Wskazówka: Zapisz rozwiązania równania $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\pi/100)$ w postaci trygonometrycznej.

Zadanie 82 — Załóżmy, że $|z| = 1$ oraz $z \notin \mathbb{R}$. Pokaż, że liczba $\frac{z-1}{z+1}$ jest czysto urojona.

Zadanie 83 — Pokaż, że $\frac{1+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ dla dowolnego α.

3.3 Kółko jednostkowe

Zadanie 84 — Pokaż, że struktura $(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$ jest grupą. Znajdź w tej grupie element rzędu nieskończonego.

Zadanie 85 — Pokaż, że struktura $(\{1, i, -1, -i\}, \cdot)$ jest grupą izomorficzną z grupą $\mathbb{C}_4$. Wyznacz rzędy elementów w tej grupie.

Zadanie 86 — Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie dodatnią liczbą naturalną. Pokaż, że zbiór $\{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ z mnożeniem jest grupą izomorficzną z grupą $\mathbb{C}_n$.

Zadanie 87 — Niech $W = \{z \in \mathbb{C} : (\exists n \in \mathbb{N})(n > 0 \wedge z^n = 1)\}$. Pokaż, że $(W, \cdot)$ jest nieskończoną grupą abelową, w której każdy element ma rząd skończony.

3.4 Kwaterniony

Zadanie 88 — Pokaż, że $(a + bi + cj + dk) \cdot (a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Zadanie 89 — Oblicz $\frac{1}{1+i+j+k}$.

Zadanie 90 — Pokaż, że $(a + bi + cj + dk)^2 = (a^2 - b^2 - c^2 - d^2) + 2abi + 2acj + 2adk$.

Zadanie 91 — Pokaż, że istnieje nieskończenie wiele takich kwaternionów z, że $z^2 = -1$.

4 Wielomiany

Zadanie 92 — Oblicz sumy, różnice i iloczyny następujących par wielomianów w pierścieniu $\mathbb{C}[x]$:

1. $P(x) = 2x^4 - x^3 + 1$, $Q(x) = -x^3 + 2x - 1$
2. $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, $Q(x) = x - 1$
3. $P(x) = (1 + i)x^2 + 2x + 2i$, $Q(x) = x^3 + ix + 1$

Zadanie 93 — Oblicz sumy, różnice i iloczyny następujących par wielomianów w pierścieniu $\mathbb{Z}_5[x]$:

1. $P(x) = 2x^4 + 4x^3 + 1$, $Q(x) = 4x^3 + 2x + 1$
2. $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, $Q(x) = x + 4$

Zadanie 94 — Oblicz $(1 + x)^5$ w pierścieniu $\mathbb{Z} - 2[x]$.

Zadanie 95 — Oblicz ilorazy oraz reszty z dzieleń następujących par wielomianów w pierścieniu $\mathbb{R}[x]$:

1. $P(x) = 2x^4 - x^3 + 1$, $Q(x) = x^2 + 1$
2. $P(x) = x^4 + 2x^2 + 2$, $Q(x) = x^2 + x + 1$
3. $P(x) = x^5 + 2x + 1$, $Q(x) = x^3 + x + 1$

Zadanie 96 — Oblicz ilorazy oraz reszty z dzieleń następujących par wielomianów w pierścieniu $\mathbb{Z}_5[x]$:

1. $P(x) = 2x^4 + 4x^3 + 1$, $Q(x) = x^2 + 1$
2. $P(x) = x^4 + 2x^2 + 2$, $Q(x) = x^2 + x + 1$
3. $P(x) = x^5 + 2x + 1$, $Q(x) = x^3 + x + 1$

Zadanie 97 — Zastosuj schemat Hornera do podzielenia z resztą następujących par wielomianów w pierścieniu $\mathbb{R}[x]$:

1. $P(x) = 4x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 1$, $Q(x) = x - 3$
2. $P(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^3 + x - 1$, $Q(x) = x - 1$

Zadanie 98 — Pokaż, że każda liczba zespolona jest pierwiastkiem pewnego wielomianu stopnia drugiego z pierścienia $\mathbb{R}[x]$.

Zadanie 99 — Znajdź wszystkie pierwiastki całkowite następujących wielomianów:

1. $2x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 4x - 3$
2. $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 10x - 5$
3. $-3 + 7x - 5x^2 + x^3$

Zadanie 100 — Znajdź wszystkie pierwiastki wymierne następujących wielomianów:

1. $2x^3 + x^2 + x - 1$
2. $6x^4 - x^3 + 5x^2 - x - 1$
3. $6x^5 + 7x^4 + 3x^3 + 7x^2 - 3x$

Zadanie 101 — Niech R będzie pierścieniem bez dzielników zera (czyli, jeśli $a \cdot b = 0$, to $a = 0$ lub $b = 0$).

1. Załóżmy, że $p(x)|x^n$. Pokaż, że $p(x) = Cx^k$ dla pewnego $C \in R$ oraz $k \leq n$.
2. Załóżmy, że $p(x)|(x - a)^n$. Pokaż, że $p(x) = C(x - a)^k$ dla pewnego $C \in R$ oraz $k \leq n$.

3. Dlaczego powyższe wyniki są oczywiste w pierścieniu $\mathbb{C}[x]$?
4. Znajdź wielomiany pierwszego stopnia $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}_6[x]$ takie, że $p(x)q(x) = x$.

Zadanie 102 — Reszta z dzielenia wielomianu $f(x)$ przez $x-1$ jest równa 3, a reszta z dzielenia $f(x)$ przez $x-4$ jest równa 5. wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $f(x)$ przez $(x-1)(x-4)$.

Zadanie 103 — Pokaż, że jeśli $a \neq b$, to reszta z dzielenia wielomianu ϕ przez wielomian $(x-a)(x-b)$ jest równa

$$\frac{\phi(a)-\phi(b)}{a-b}x + \frac{b\phi(a)-a\phi(b)}{b-a} \ .$$

Zadanie 104 — Pokaż, że reszta w dzielenie wielomianu $\phi(x)$ przez $(x-a)^2$ wynosi $\phi'(a)(x-a)+\phi(a)$.

Zadanie 105 — Podaj warunki konieczne i wystarczające na to aby wielomiany x^2+px+q i x^3+px+q miały pierwiastki wielokrotne.

Zadanie 106 — Niech $\phi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$. Pokaż, że żaden z wielomianów ϕ_n nie ma pierwiastków wielokrotnych. Wskazówka: Oblicz $\phi_n'(x)$.

Zadanie 107 — Pokaż, że dla dowolnego wielomianu $p(x) \in K[x]$ oraz dowolnego $c \in K$ mamy $p(x+c)' = p'(x+c)$.

Zadanie 108 — Pokaż, że jeśli $\phi'(x)|\phi(x)$ to $\phi(x) = a(x-b)^n$ dla pewnych $a, b \in K$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Wskazówka: Jeśli $\phi'(x)|\phi(x)$ to $\phi(x) = \phi'(x)(x-b)$ dla pewnego b. Skorzystaj następnie z poprzedniego zadania.

Zadanie 109 — Wyznacz:
1. $\mathrm{NWD}(x^4-4, x^4+4x^2+)$,
2. $\mathrm{NWD}(x^5-1, x^4-1)$,
3. $\mathrm{NWD}(2x^5-1, x^4-1)$.

Zadanie 110 — Dla podanych par wielomianów $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ wyznacz wielomiany $\alpha, \beta \in \mathbb{R}[x]$ takie, że $\mathrm{NWD}(P,Q) = \alpha \cdot P + \beta \cdot Q$:
1. $P(x) = x^3-1, Q(x) = x^2-1$
2. $P(x) = x^4-1, Q(x) = x^2+1$

* **Zadanie 111 —** Dla jakich liczb całkowitych p wielomian $P(x) = x^{13}+x+90$ jest podzielny przez wielomian $Q(x) = x^2-x-p$?
Wskazówka: Zauważ, że $Q(0) = Q(1) = -p$.

Zadanie 112 — Pokaż, stosując czysto algebraiczne środki, że każdy wielomian z $\mathbb{R}[x]$ nieparzystego rzędu ma rzeczywisty pierwiastek.

Zadanie 113 — . Niech $\epsilon_{n,k} = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$. Pokaż, że

$$x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(x-\epsilon_{n,k}) \ .$$

Zadanie 114 — Znajdź rozkłady wielomianów x^5-1, x^6-1 i x^8-1 na iloczyn nierozkładalnych wielomianów z pierścienia $\mathbb{R}[x]$.

Zadanie 115 — Znajdź rozkłady wielomianu $x^4 + 1$ na iloczyn nierozkładalnych wielomianów z pierścienia $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ oraz $\mathbb{Q}[x]$.

Zadanie 116 — Pokaż, że następujące wielomiany są nierozkładalne w $\mathbb{Q}[x]$:

1. $x^7 + 6x^2 - 18x^3 + 42x + 12$
2. $x^3 - 3x - 1$,
3. $x^4 + x^2 - 1$

Zadanie 117 — Niech $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}$ będą parami różne oraz, że $p(a) = p(b) = p(c) = -1$. Pokaż, że wielomian $p(x)$ nie ma zer całkowitych.

* **Zadanie 118 —** Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą parami różnymi liczbami całkowitymi. Pokaż, że wielomian $(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$.
Wskazówka: Załóż, że $w(x) = u(x)v(x)$; przyjrzyj się najpierw wartością $u(a_k)v(a_k)$, a potem wartością $u(a_k) + v(a_k)$.

** **Zadanie 119 —** Załóżmy, że wielomian $w(x) \in \mathbb{C}[x]$ spełnia równanie funkcyjne $w(x^2) = (w(x))^2$. Pokaż, że $w = 0$ lub $w(x) = x^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.
Wskazówka: Zauważ, że jeśli $w(x) = 0$, to również $w(x^2) = 0$. Z tego wywnioskuj, że jeśli w jest niezerowy, to nie może mieć niezerowych pierwiastków zespolonych o module różnym od 1. Zauważ następnie, że jeśli $w(x) = 0$ oraz $y^2 = x$ to również $w(y) = 0$.

* **Zadanie 120 —** Znajdź niezerowy wielomian $w \in \mathbb{Z}[x]$ którego pierwiastkiem jest liczba $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
Wskazówka: Istnieje taki wielomian stopnia 4.

Zadanie 121 — Wyznacz wszystkie nierozkładalne wielomiany pierścienia $Z_2[x]$ stopnia 4 oraz 5.

Zadanie 122 — Rozwiąż równanie $x^3 - 6x - 6 = 0$ w ciele liczb zepolonych.

Zadanie 123 — Niech $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach zespolonych. Pokaż, że jeśli z_0 jest pierwiastkiem wielomianu f to

$$|z_0| \leq \max\{1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\} .$$

Zadanie 124 — Znajdź odcinek zawierający wszystkie rzeczywiste pierwiastki wielomianu $3x^5 + 5x^3 - 9x^2 + 4x + 12$.

Zadanie 125 — Niech $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach zespolonych. Pokaż, że jeśli z_0 jest pierwiastkiem wielomianu f to

$$|z_0| < 1 + \max\{|a_k| : 0 \leq k < n\} .$$

* **Zadanie 126 —** Otoczką wypukłą skończonego zbioru $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ nazywamy zbiór

$$\{\sum_{k=1}^{n} t_k a_k : (\forall i \in \{1, \ldots, n\})(t_i \geq 0) \wedge \sum_{k=1}^{n} t_i = 1\}$$

Niech $p(x) \in \mathbb{C}[x]$. Niech $A = \{z \in \mathbb{C} : p(z) = 0\}$. Pokaż, że każdy pierwiastek wielomianu $p'(x)$ należy do otoczki wypukłej zbioru A.
Wskazówka: Zauważ, że $\frac{1}{\overline{z-a}} = \frac{z-a}{|z-a|^2}$.

Zadanie 127 — Rozłóż na czynniki pierwsze w $\mathbb{C}[x]$ wielomian $(x + a)^n + (y + b)^n$.

5 Przestrzeń $\mathbb{R}^n$

Zadanie 128 — Wyznacz zbiory

1. $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \langle \vec{x}, (1,1) \rangle = 0\}$
2. $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{x}, (1,1,1) \rangle = 0\}$
3. $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x} - (0,0,1)\| = 1\}$

Zadanie 129 — Pokaż, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ mamy $\langle a\vec{x} + b\vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle a\vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle a\vec{x}, \vec{z} \rangle$.

Zadanie 130 — Pokaż, że dla dowolnych $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{\|\vec{x} + \vec{y}\| - \|\vec{x} - \vec{y}\|}{4} .$$

Zadanie 131 — Pokaż, że $|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

Zadanie 132 — Ustalmy punkty $A = (0, \ldots, 0)$, $B, C \in \mathbb{R}^n$. Rozważmy trójkąt o wierzchołkach A, B, C. Jaka jest długość wysokości w tym trójkącie „opuszczonej” z wierzchołka C na krawędź AB?

Zadanie 133 — Wyznacz współrzędne punktu środkowego trójkąta wyznaczonego przez końce wektorów $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$.

6 Przestrzenie wektorowe

Zadanie 134 — Niech K będzie ciałem.

1. Pokaż, że $K[x]$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem K.
2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy zbiór $K_n[x] = \{w \in K[x] : deg(w) \leq n\}$. Pokaż, że $K_n[x]$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem K.
3. Niech $n \in \mathbb{N}$. Pokaż, że

$$K_n[x] = Lin(\{1\}) \oplus Lin(\{x\}) \oplus \ldots \oplus Lin(\{x^n\}) .$$

Zadanie 135 — Pokaż, że w dowolnej przestrzeni wektorowej V nad dowolnym ciałem K prawdziwe są następujące fakty:

1. $(\forall \vec{x} \in V)(0 \cdot \vec{x} = \vec{0})$,
2. $(\forall \lambda \in K)(\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0})$,
3. $(\forall \lambda \in K)(\forall \vec{x} \in V)\,((-\lambda) \cdot \vec{x} = \lambda(-\vec{x}) = -(\lambda \cdot \vec{x}))$.

Zadanie 136 — Pokaż, że jeśli B jest zbiorem liniowo niezależnym, to $\vec{0} \notin B$.

Zadanie 137 — Załóżmy, że zbiór $\{f_1, f_2, f_3, f_4\} \subseteq V$ jest liniowo niezależny.

1. Pokaż, że zbiór $\{f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, f_1 + f_2 + f_3 + f_4\}$ jest liniowo niezależny.
2. Pokaż, że zbiór $\{f_1, f_2, f_3, f_3 + f_4\}$ jest liniowo niezależny.
3. Pokaż, że zbiór $\{f_1, f_2, f_3 - f_4, f_4\}$ jest liniowo niezależny.
4. Uogólnij powyższe fakty na większą liczbę elementów.

Zadanie 138 — Niech $V = \mathbb{R}^2$, $f_1 = (2, 1)$, $f_2 = (1, 2)$ oraz $B = \{f_1, f_2\}$.

1. Pokaż, że zbiór B jest bazą przestrzeni V.
2. Niech $(x, y) \in V$. Znajdź takie liczby rzeczywiste λ, μ, że $(x, y) = \lambda \cdot f_1 + \mu \cdot f_2$.

Zadanie 139 — Rozszerz zbiór wektorów $\{(1, 1, 1), (2, 1, 3)\}$ do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
Wskazówka: Znajdź taki wektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, że $\langle \vec{a}, (1, 1, 1) \rangle = 0$ oraz $\langle \vec{a}, (2, 1, 3) \rangle = 0$.

Zadanie 140 — Niech K będzie k elementowym ciałem. Załóżmy, że zbiór $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ jest liniowo niezależny. Pokaż, że wtedy zbiór $Lin(F)$ ma k^n elementów.

Zadanie 141 — Niech K będzie ciałem.

1. Pokaż, że zbiór wielomianów $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $K_n[x]$.
2. Pokaż, że zbiór wielomianów $\{1, x - 1, (x - 1)^2, \ldots, (x - 1)^n\}$ jest również bazą przestrzeni liniowej $K_n[x]$.

Zadanie 142 — Pokaż, że niepusty podzbiór H przestrzeni wektorowej V jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy $Lin(H) = H$.

Zadanie 143 — Pokaż, że jeśli $\mathcal{S}$ jest niepustą rodziną podprzestrzeni linowych przestrzeni V, to zbiór $\bigcap \mathcal{S}$ jest również podprzestrzenia liniową przestrzeni V.

Zadanie 144 — Niech E będzie dowolnym niepustym podzbiorem przestrzeni wektorowej V. Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną wszystkich podprzestrzeni liniowych przestrzeni V które zawierają zbiór E. Pokaż, że $Lin(E) = \bigcap \mathcal{S}$.

7 Odwzorowania liniowe i macierze

Zadanie 145 — Czy odwzorowanie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane wzorem $T(x, y) = (xy, x + y)$ jest odwzorowaniem liniowym?

Zadanie 146 — Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadana wzorem

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} .$$

Wyznacz przestrzenie $ker(F)$ oraz $rng(F)$ oraz ich wymiary.

Zadanie 147 — Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem liniowym zadanym wzorem $F(x, y, z) = (2x + z, x - y + z, x + 2y)$. Wyznacz macierz przekształcenia F w standardowej bazie przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 148 — Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie odwzorowaniem liniowym zadanym wzorem $F(x, y) = (x - y, -x + y)$.

1. Wyznacz macierz przekształcenia F w standardowej bazie przestrzeni $\mathbb{R}^2$.
2. Wyznacz macierz przekształcenia F w bazie uporządkowanej $\{f_1 = (1, 1), f_2 = (1, -1)\}$.

Zadanie 149 — Niech $V = \mathbb{R}_3[x] = \{w \in \mathbb{R}[x] : \deg(w) \leq 3\}$. Niech $L(w) = w'$ (pochodne wielomianu w).

1. Pokaż, że L jest odwzorowaniem liniowym.
2. Wyznacz macierz odwzorowania L w bazie uporządkowanej $(1, x, x^2, x^3)$.

Zadanie 150 — Niech $F : V \to H$ będzie odwzorowaniem liniowym skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych V i K.

1. Pokaż, że $dim(rng(F)) \leq dim(V)$.
2. Kiedy $dim(V) = dim(rng(F))$?

Zadanie 151 — Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją, która każdemu punktowi przyporządkowuje jego odbicie względem prostej zadanej równaniem $y = \sqrt{3}x$. Pokaż, że F jest transformacją liniową i wyznacz jej macierz w standardowej bazie.
Wskazówka: $\sqrt{3} = \tan(60^o)$.

Zadanie 152 — Opisz wszystkie przekształcenia liniowe z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$.

Zadanie 153 — Opisz wszystkie przekształcenia liniowe z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}$.

Zadanie 154 — Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie określona wzorem $F(x, y) = (ax, by)$, gdzie $a, b > 0$. Niech $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Wyznacz macierz odwzorowania F.
2. Wyznacz obraz $\vec{F}[S]$.
3. Wyznacz powierzchnie zbioru $\vec{F}[S]$.
4. Wyznacz macierz F^{-1} w standardowej bazie $\mathbb{R}^2$.

7.1 Macierze

Zadanie 155 — Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Oblicz $2A + 3B$, $A \cdot B$ oraz $B \cdot A$.

Zadanie 156 — Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Oblicz $A - 2B$, $A \cdot B$ oraz $B \cdot A$.

Zadanie 157 — Oblicz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 158 — Niech K będzie ciałem oraz niech $n \geq 1$.

1. Pokaż, że struktura $M_n(K) = (M_{n\times n}(K), +, \circ)$ jest pierścieniem z jednością.
2. Pokaż, że jeśli $n \geq 2$, to pierścień ten jest nieprzemienny.
3. Z jaką strukturą jest izomorficzna struktura $M_1(K)$?

Zadanie 159 — Niech K będzie ciałem. Niech $A \in M_{m\times n}(K)$ oraz $B \in M_{p,m}(K)$. Pokaż, że

$$(B \circ A)^T = A^T \cdot B^T .$$

Zadanie 160 — Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Wyznacz kilka pierwszych potęg A^n, odgadnij ogólny wzór na A^n i następnie udowodnij go, stosując metodę indukcji matematycznej.

Zadanie 161 — Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Wyznacz kilka pierwszych potęg A^n, odgadnij ogólny wzór na A^n i następnie udowodnij go, stosując metodę indukcji matematycznej.

Zadanie 162 — Niech $R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

1. Pokaż, że rodzina macierzy $\{R_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ jest grupą ze względu na operację mnożenia macierzy.

2. Pokaż, że powyższa grupa jest izomorficzna z grupą $(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$.

* **Zadanie 163 —** Śladem macierzy kwadratowej $A = [a_{i,j}]$ nazywamy liczbę $\mathrm{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$. Pokaż, że dla dowolnych dwóch macierzy kwadratowych A i B tego samego rozmiaru mamy:

1. $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$,
2. $\mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A)$.

Zadanie 164 — Pokaż, że nie istnieją macierze kwadratowe A, B tego samego rozmiaru takie, że

$$A \cdot B - B \cdot A = I \,,$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową.

Zadanie 165 — Niech V_1, V_2 będą przestrzeniami liniowymi wymiarów n oraz m. Wyznacz wymiar przestrzeni $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ odwzorowań liniowych z V_1 w V_2.
Wskazówka: Ustal bazy B, C obu przestrzeni. Przyglądnij się przestrzeni macierzy $\{M_{C,B}(F) : F \in \mathcal{L}(V_1, V_2)\}$. Wystarczy, że wskażesz jedną bazę tej przestrzeni.

Zadanie 166 — Czy z równania macierzowego $A \cdot B = A \cdot C$ wynika $B = C$, jeśli $A \neq 0$?

Zadanie 167 — Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Oblicz

$$A^2 - \mathrm{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I \,.$$

Zadanie 168 — Wyznacz równanie obrotu płaszczyzny wokół punktu (x_0, y_0) o kąt α. Wskazówka: Zastosuj metodę zapisu transformacji afinicznych płaszczyzny z pomocą macierze rozmiaru 3×3. Przesuń najpierw punkt (x_0, y_0) do środka układu współrzędnych..

7.2 Wyznaczniki

Zadanie 169 — Wyznacz znak permutacji $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$.
Wskazówka: Zapisz π jako superpozycję $n - 1$ transpozycji.

Zadanie 170 — Jaka jest złożoność obliczeniowa algorytmu wyznaczania znaku permutacji opartego na definicji $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{I(\pi)}$, gdzie $I(\pi)$ oznacza liczbę inwersji w permutacji π?

Zadanie 171 — Niech $n \geq 2$ oraz $A_n = \{\pi \in S_n : \mathrm{sgn}(\pi) = 1\}$. Pokaż, że $|A_n| = \frac{1}{2} n!$.

Zadanie 172 — Wyznacz wyznaczniki następujących macierzy:

1. $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & i & 3 & 4 \\ 1 & 2i & 2 & i+1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Zadanie 173 — Oblicz wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & b & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & c & 0 & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & d & 0 \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & e \end{bmatrix}$$

Zadanie 174 — Oszacuj złożoność obliczeniową, mierzoną liczbą wykonywanych operacji arytmetycznych, algorytmu wyznaczania wyznacznika macierzy kwadratowej $A \in M_n(\mathbb{R})$ opartego bezpośrednio na definicji

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(a)} \, .$$

Do ostatecznego oszacowania złożoności wykorzystaj wzór Stirlinga $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Zadanie 175 — Napisz w ulubionym języku programowania algorytm wyznaczania wyznacznika macierzy kwadratowej o złożoności $O(n^3)$ (podobnie jak wyżej, mierzoną liczbą wykonywanych operacji arytmetycznych) gdzie n jest liczbą kolumn danej macierzy.

Zadanie 176 — Niech

$$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

(w macierzy tej wszystkie wyrazy poza leżącymi na przekątnej łączącą lewy górny róg z prawym dolnym rogiem są równe zero).

Uwaga: Macierz tej postaci nazywamy diagonalną.

1. Oblicz $\det(A)$.
2. Pokaż, że $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \cdot \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) = \operatorname{diag}(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$.
3. Wyznacz A^k dla $k \in \mathbb{N}$

Zadanie 177 — Niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(w macierzy tej wszystkie wyrazy poza leżącymi na przekątnej łączącą lewy dolny róg z prawym górnym rogiem są równe zero). Oblicz $\det(A)$.

Zadanie 178 — Oblicz wyznacznik macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Zadanie 179 — Załóżmy, że $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,n}$ jest taką macierzą rozmiaru $n \times n$ taką, że $a_{i,j} \in \{0, 2\}$ dla wszystkich $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Pokaż, że $\det A$ jest liczbą podzielną przez 2^n.

Zadanie 180 — Załóżmy, że $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,n}$ jest taką macierzą rozmiaru $n \times n$ taką, że $a_{i,j} \in \{-1, 1\}$ dla wszystkich $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Pokaż, że $\det A$ jest liczbą podzielną przez 2^{n-1}.

Zadanie 181 — Niech $F : \mathbb{C} \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ będzie określone wzorem

$$f(a + bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} .$$

Pokaż, że:

1. f jest funkcją różnowartościową
2. $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$
3. $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$
4. $|z| = \det(f(z))$

Uwaga: Pokazaliśmy, że ciało liczb zespolonych można zanurzyć w pierścień $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Zadanie 182 — Znajdź macierze odwrotne do następujących macierzy, stosując metodę wyznaczania macierzy elementów algebraicznie sprzężonych:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 183 — Niech $GL_n(K) = \{A \in M_n(K) : \det(A) \neq 0\}$.

1. Pokaż, że $GL_n(K)$ jest grupą ze działaniem mnożenia macierzy.
2. Pokaż, że jeśli $A \in M_n(K)$ jest taką macierzą, że $(\forall B \in M_n(K))(A \circ B = B \circ A)$, to istnieje $\lambda \in K$ taka, że $A = \lambda I_n$.
3. Centrum grupy G nazywamy zbiór $Z(G) = \{g \in G : (\forall x \in G)(x \cdot g = g \cdot x)\}$. Wyznacz $Z(GL_n(K))$.

Zadanie 184 — Niech $SL_n(K) = \{A \in M_n(K) : \det(A) = 1\}$.

1. Pokaż, że $SL_n(K)$ jest grupą z działaniem mnożenia macierzy.
2. Wyznacz $Z(SL_n(K))$.

Zadanie 185 — Macierz kwadratową $T = [t_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy górnie trójkątną jeśli $(\forall 1 \leq j < i \leq n) t_{ij} = 0$.

1. Pokaż, że zbiór wszystkich macierzy górnie trójkątnych macierzy z pierścienia $M_n(K)$ jest pierścieniem.
2. Wyznacz wyznacznik macierzy górnie trójkątnej.
3. Pokaż, że zbiór $UT_n(K)$ wszystkich odwracalnych górnie trójkątnych macierzy jest grupą.

8 Układy równań liniowych

Zadanie 186 — Rozwiąż, stosując wzory Cramera, następujące układy równań:

$$\begin{cases} 2x+y &= 1 \\ x+y &= 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+z &= 1 \\ x+y-z &= 2 \\ 3x-2y+2z &= 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-y+z &= 1 \\ x+y-z &= 1 \\ x-y-z &= 2 \end{cases}$$

Zadanie 187 — Zbalansuj równanie $C_2H_6 + O_2 \to CO_2 + H_2O$ opisujące spalanie etanu.

Zadanie 188 — Zastosuj wzory Cramera do znalezienia równanie prostej przechodzącej przez punkty $(1, 2)$ i $(2, 3)$.

Zadanie 189 — Zastosuj wzory Cramera do znalezienia równanie paraboli przechodzącej przez punkty $(1, 2)$, $(2, 3)$ i $(3, 1)$.

Zadanie 190 — Zastosuj wzory Cramera do wyznaczenia wielomianu trzeciego stopnia $y = ax^3 + bx^2 + c^x + d$ przechodzącego przez punkty $(1, 1)$, $(-1, 0)$, $(2, 0)$ $(3, 1)$.

Zadanie 191 — (Rozkład na ułamki proste) Znajdź liczby $a, b, c \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\frac{2x+1}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+1}$$

Zadanie 192 — Pokaż, że dla dowolnego $n \geq 1$ mamy

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{x+k}$$

Zadanie 193 — Wyznacz rzędy następujących macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 194 — Załóżmy, że macierze A i B są tego same go rozmiaru. Pokaż, że

$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

Wskazówka: Skorzystaj bezpośrednio z definicji: $\operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{Lin}([k_1, \ldots, k_n]))$.

Zadanie 195 — Niech $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ oraz $(b_i)_{i=1,\ldots,n}$ będą dwoma ciągami elementów ustalonego ciała. Niech $c_{i,j} = a_i \cdot b_j$. Niech $C = [c_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,n}$ Pokaż, że $\operatorname{rank}(C) \leq 1$.

Zadanie 196 — Dane jest sześć liczb rzeczywistych x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2 takich, że $x_1 \neq x_2$. Pokaż, że istnieje wielomian $w(x) \in \mathbb{R}[x]$ stopnia ≤ 3 taki,że $w(x_1) = y_1$, $w(x_2) = y_2$ oraz $w'(x_1) = t_1$, $w'(x_2) = t_2$.

Zadanie 197 — Stosując metodą eliminacji Gaussa-Jordana rozwiąż następujące układy równań:

$$\begin{cases} 2x+y &= 1 \\ x+3y &= 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+z &= 1 \\ x+2y-z &= 2 \\ 3x-2y+2z &= 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-y+z &= 1 \\ x+y-z &= 1 \\ 3x+y-z &= 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3y-z &= 2 \\ 2x+4y+z &= 4 \\ x+2y+z &= 1 \end{cases}$$

Zadanie 198 — Niech $1 \leq i < j \leq n$. Znajdź macierz $E \in K_{n\times n}$ taką, że $E \cdot A$ jest macierzą powstającą z macierzy $A \in K_{n\times n}$ poprzez zamianę wierszy i oraz j.

Zadanie 199 — Stosując metodę eliminacji Gaussa wyznacz macierze odwrotne następujących macierzy:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 200 — Dla jakich wartości a, b następująca macierz

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

jest odwracalna? Dla a i b spełniających ten warunek wyznacz macierz A^{-1}.

Zadanie 201 — Przetestuj polecenia typu

```
solve x+y+z=1,x-y+z=2, x+2*y + 3*z = 3
inverse matrix {{1,1},{1,2}}
```

w serwisie Wolfram Alpha.

Zadanie 202 — Załóżmy, że

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

gdzie A_{ij} i B_{ij} są macierzami rozmiaru $k \times k$ (macierze A i B są więc rozmiaru $(2k) \times (2k)$. Niech

$$C = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix},$$

Pokaż, że $C = A \cdot B$.
Uwaga: Własność ta służy do pisanie rekurencyjnych procedur mnożenia macierzy: mnożenie macierzy rozmiaru $(2n) \times (2n)$ można sprowadzić do mnożenia macierzy rozmiaru $n \times n$. Wykorzystywana jest, na przykład, w metodzie Strassena mnożenia macierzy.

9 Wektory i wartości własne

Zadanie 203 — Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Wyznacz wielomian charakterystyczny, wartości własne oraz wektory własne macierzy A.
2. Zapisz macierz odwzorowania F_A w bazie złożonej z wektorów własnych.
3. Sprawdź twierdzenie Cayley'a-Hamilton'a na przykładziej tej macierzy.

Zadanie 204 — Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Znajdź wartości i wektory własne macierzy A, A^2 oraz A^{-1}.
2. Porównaj wartości $\lambda_1 + \lambda_2$ oraz $\lambda_1\lambda_2$ ze śladami i wyznacznikami macierzy A i A^2.
3. Zapisz odwzorowanie F_A w bazie złożonej z wektorów własnych macierzy A.
4. Wyznacz macierz odwzorowania $(F_A)^n$ w tej bazie dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.
5. Wyznacz wzór na A^n dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 205 — Niech $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$. Pokaż, że

$$\det(A) = \frac{1}{6}\left((\mathrm{tr}(A))^3 - 3\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A^2) + 2\mathrm{tr}(A^3)\right) .$$

Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia Cayley'a-Hamilton'a.

Zadanie 206 — Zastosuj twierdzenie Cayley'a-Hamilton'a do wyznaczania macierzy odwrotnej macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Zadanie 207 — Macierzą stowarzyszoną z wielomianem $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1x + a_0$ nazywamy macierzy

$$C(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

1. Pokaż, że jeśli $n \geq 2$, to wielomianem charakterystycznym macierzy $C(p)$ jest wielomian $p(\lambda)$.
2. Pokaż, że jeśli λ jest wartością własną macierzy $C(p)$ to wektor $[1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1}]^T$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości λ.
3. Liczbę rzeczywistą α nazywamy **algebraiczną** jeśli istnieje niezerowy wielomian $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ taki, że $p(\alpha) = 0$. Pokaż, że liczba α jest algebraiczna wtedy i tylko wtedy, gdy jest wartością własną pewnej macierzy kwadratowej o współczynnikach wymiernych.

Zadanie 208 — Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy **nilpotentną** jeśli istnieje k takie, że $A^k = 0$.

1. Pokaż, że jeśli macierz A jest nilpotentna, to macierz $A + I$ jest odwracalna.
2. Pokaż, że jeśli macierz A jest nilpotentna, to $\det(A) = 0$.

Zadanie 209 — Niech $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, 0)$.

1. Wyznacz macierz A odwzorowania F w standardowej bazie. **Uwaga:** Macierze tej postaci nazywamy macierzami przesunięcia.
2. Oblicz wielomian charakterystyczny macierzy A
3. Wyznacz A^k dla dowolnego $k \geq 1$.

9.1 Podobieństwo macierzy

Zadanie 210 — Pokaż, że relacja podobieństwa macierzy jest relacją równoważności.

Zadanie 211 — Załóżmy, że macierz A jest podobna do macierzy B.

1. Pokaż, że macierze A i B mają te same wielomiany charakterystyczne.
2. Pokaż, że macierze A i B mają te same wartości własne oraz wektory własne

3. Pokaż, że macierze A i B mają te same ślady.
4. Pokaż, że macierze A i B mają te same rzędy.

Zadanie 212 — Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Wyznacz wartości własne macierzy A.
2. Znajdź bazę $\mathbb{R}^2$ złożoną z wektorów własnych (f_1, f_2).
3. Niech T będzie macierzą przejścia z bazy (e_1, e_2) do bazy (f_1, f_2). Oblicz $T \circ A \circ T^{-1}$.

9.2 Page Rank

Zadanie 213 — Załóżmy, że $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ są kolumnowo stochastyczne.

1. Pokaż, że macierz $A \circ B$ jest kolumnowo stochastyczna.
2. Niech $\alpha \in [0, 1]$. Pokaż, że macierz $\alpha A + (1 - \alpha)B$ jest kolumnowo stochastyczna.

Zadanie 214 — Wyznacz PageRank dla następujących grafów przyjmując $\alpha = 0.75$:

1. $\{a \to c, c \to a, b \to c, c \to b\}$,
2. $\{a \to b, b \to a, b \to c\}$,
3. $\{i \to n + 1, i = 1 \dots, n\}$, gdzie n jest ustaloną liczbą naturalną.

Zadanie 215 — Załóżmy, że w grafie nie ma 'wiszących wierzchołków'. Niech v będzie wierzchołkiem bez linków do tego wierzchołka. Niech n oznacza liczbę wierzchołków tego grafu. Pokaż, że page rank wierzchołka v jest równy $\frac{1-\alpha}{n}$.

10 Ortogonalizacja Gramma - Schmidt'a

Zadanie 216 — Niech $x \in \mathbb{R}^n$. Pokaż, że zbiór $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle = 0\}$ jest liniową podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 217 — Zastosuj proces ortogonalizacji Grama - Schmidt'a do wektorów $u_1 = [1, 2, 1, 1]$, $u_2 = [2, 2, 0, 1]$, $u_3 = [3, 2, 1, 0]$ w przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 218 — Zastosuj proces ortogonalizacji Grama - Schmidt'a do wektorów $u_1 = [1, i, 1]$, $u_2 = [2, 2, 0]$, $u_3 = [i, 1, 0]$ w przestrzeni $\mathbb{C}^4$ z iloczynem skalarnym zadanym wzorem

$$\langle [u_1, \dots, u_4], [v_1, \dots, v_4] \rangle = \sum_{i=1}^{4} u_i \overline{v_i}$$

Zadanie 219 — Zastosuj metodę ortogonalizacji Grama - Schmidt'a do wielomianów $u_0 = 1$, $u_1 = x$, $u_2 = x^2$, $u_3 = x^3$ w przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]$ z iloczynem skalarnym zadanym wzorem

$$\langle u, v \rangle = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx.$$

Efektem końcowym ma być ortonormalny układ wielomianów.
Uwaga: Otrzymamy kilka pierwszych tak zwanych wielomianów Legendra.

Zadanie 220 — Załóżmy, że $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ jest macierzą ortogonalną o wyznaczniku równym 1. Pokaż, że

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + Tr(A)\lambda^2 - Tr(A)\lambda + 1 .$$

Zadanie 221 — Załóżmy, że macierze kwadratowe A i B komutują, czyli, że $A \circ B = B \circ A$. Dla $\lambda \in \mathbb{C}$ określamy $VB^{\lambda} = \{x : Bx = \lambda x\}$. Pokaż, że $AV_B^{\lambda} \subseteq V_B^{\lambda}$.

Zadanie 222 — Niech $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie określone wzorem $T(a_1, \ldots, a_n) = (a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1)$. Wyznacz wartości własne odwzorowania T. Wskazówka: Zauważ, że $T^n = \mathrm{Id}$.

Zadanie 223 — Niech $\{u_1, \ldots, u_n\}$ będzie ortonormalnym zbiorem wektorów w $\mathbb{R}^m$. Pokaż, że

$$\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 .$$

11 Macierze ortogonalne

Zadanie 224 — Niech $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem zachowującym długości, czyli takim, że $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(\|T(x)\| = \|x\|)$.

1. Pokaż, że T zachowuje iloczyn skalarny, czyli, że $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)(\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle)$.
2. Pokaż, że macierz odwzorowania T w standardowej bazie jest macierzą ortogonalną.

Zadanie 225 — Pokaż, że jeśli kwadratowa macierz A ma ortonormalne kolumny, to ma również ortonormalne wiersze.

Zadanie 226 — Niech $O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^T A = I_n\}$. Pokaż, że $O(n)$ jest grupą (z działaniem określonym jako mnożenie macierzy).

Zadanie 227 — Pokaż, że jeśli A jest macierzą ortogonalną, to każda wartość własna macierzy A jest równa 1 lub -1.

* **Zadanie 228 —** Załóżmy, że $R \in O(3)$ jest taką macierzą, że $\det(R) > 0$.

1. Pokaż, że $\det(R) = \det(R^{-1}) = 1$.
2. Pokaż, że $\det(-R) = -\det(R)$.
3. Pokaż, że $\det(R - I) = \det(R^{-1} - I)$. Wskazówka: Skorzystaj z tego, że $(R - I)^T = R^T - I$.
4. Pokaż, że $\det(R^{-1} - I) = -\det(R^{-1})\det(R - I)$
5. Korzystając z poprzednich punktów pokaż, że $\det(R - I) = -\det(R - I)$. Wywnioskuj z tego, że $\det(R - I) = 0$.
6. Pokaż, że istnieje taki wektor $x \in \mathbb{R}^3$, że $R \cdot x^T = x^T$.

Uwaga: Udowodniliśmy (prawie) w ten sposób twierdzenie Eulera: każda izometria F przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nie zmieniająca punktu 0 ($F(0) = 0$) oraz orientacji przestrzeni ($\det(M_F) > 0$) jest obrotem względem pewnej osi .

12 Macierze symetryczne

Zadanie 229 — Niech A będzie dowolną macierzą. Pokaż, że $A \cdot A^T$ oraz $A^T \cdot A$ są macierzami symetrycznymi.

Zadanie 230 — Macierz kwadratową (a_{ij}) nazywamy antysymetryczną jesli $a_{ij} = -a_{ji}$ dla dowolnej pary indeksów (i, j). Pokaż, że dla dowolnej macierzy kwadratowej A istnieją macierze B i C takie, że B jest symetryczna, C jest antysymetryczna oraz $A = B + C$.

Zadanie 231 — Pokaż, że jeśli A jest macierzą symetryczną, to A^2 jest również macierzą symetryczną.

Zadanie 232 — Pokaż, że jeśli A jest macierzą ortogonalnie diagonizowalną, to również macierz A^2 jest ortogonalnie diagonizowalna.

Zadanie 233 — Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Wyznacz wielomian charakterystyczny macierzy A.
2. Wyznacz wartości własne i wektory własne.
3. Sprawdź ortogonalność wektorów własnych.

13 Formy kwadratowe

Zadanie 234 — Wyznacz macierze następujących form kwadratowych oraz wyznacz odpowiadającą im formy dwuliniowe:

1. $f = x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2$
2. $f = x_1x_2 - x_2x_3 + x_3x_4$

Zadanie 235 — Dla jakiej wartości parametru α forma kwadratowa $f = x_1^2 - 2\alpha x_1x_2 + x_2^2$ jest dodatnio określona.

Zadanie 236 — Niech $Q_c(x, y) = cx^2 + cy^2 + xy$.

1. Zbadaj własności formy kwadratowej Q w zależności od parametru c. W szczególności, dla jakich c forma Q_c jest dodatnio określona.
2. Znajdź najwięszą i najmniejszą wartość formy Q_c na kuli jednostkowej.

Zadanie 237 — Zredukuj następujące kwadratowe formy nad ciałem $\mathbb{R}$ do postaci diagonalne. Zbadaj, czy są dodatnio lub ujemnie określone. Znajdź (jeśli istnieją) takie niezerowe wektory X, że $Q(X) > 0$ lub $Q(X) < 0$ lub $Q(X) = 0$. Znajdź maksymalną i minimalną wartość Q na sferze jednostkowej.

1. $Q(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$,
2. $Q(x, y, z) = -2x^2 - 5y^2 + 12yz + 7z^2$,
3. $Q(x, y, z) = 4xy + 3y^2 + z^2$,
4. $Q(x, y, z) = 25x^2 - 7y^2 + 48yz + 7z^2$,
5. $Q(x, y, z) = \sqrt{2}(x^2 + y^2 + z^2) + 2x(y - z)$,
6. $Q(x, y, z) = 5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz$,
7. $Q(x, y, z) = 2(xy + yz + zx)$.

c.d.n.
Powodzenia,
Jacek Cichoń