Analiza Matematyczna I

I termin

Jacek Cichoń
Politechnika Wrocławska
WPPT

27 stycznia 2018

To są zadania z egzaminu który odbył się 26.01.2018. Poniżej zadań znajdują się komentarze i szkice rozwiązań.

Zadanie 1

Wariant 0. Niech $a \geqslant 0$. Wyznacz granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{1+a^n}$.

Rozwiązanie. Jeśli $0 \leqslant a \leqslant 1$, to $1 \leqslant \sqrt[n]{1+a^n} \leqslant \sqrt[n]{1+1} = \sqrt[n]{2}$, więc z Twierdzenia o trzech ciągach mamy $\lim_n a_n = 1$. Jeśli $a > 1$ to $a = \sqrt[n]{a^n} < \sqrt[n]{1+a^n} \leqslant \sqrt[n]{a^n+a^n} = \sqrt[n]{2a^n} = a\sqrt[n]{2}$, więc z Twierdzenia o trzech ciągach mamy $\lim_n a_n = a$. Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+a^n} = \begin{cases} 1 & : 0 < a \leqslant 1 \\ a & : a > 1 \end{cases}$$

Wariant 1. Wyznacz granicę ciągu o wyrazach

$$a_n = \sqrt[n]{\sum_{k=0}^{2^n} k}$$

Rozwiązanie. Mamy $\sum_{k=0}^{2^n} k = \frac{1}{2}2^n(2^n+1)$. Zatem $\sqrt[n]{\frac{1}{2}2^n 2^n} \leqslant a_n \leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{2}2^n(2^n+2^n)} = \sqrt[n]{2^n 2^n}$, czyli $4\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \leqslant a_n \leqslant 4$. Z Twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że $\lim_n a_n = 4$.

Zadanie 2

Wariant 0. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = \frac{(1+x)^2}{2-x^2}$
Wariant 1. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = \frac{(1-x)^2}{2-x^2}$.

Komentarz: tu nie było żadnych niespodzianek.

Zadanie 3

Wariant 0. Niech $a, b > 0$. Dla jakiej wartości x funkcja $f(x) = \frac{a}{x^2} + bx^2$ przyjmuje najmniejszą wartość i ile ona wynosi?

Rozwiązanie. Można to zrobić standardowo wyznaczając punkty stacjonarne funkcji f, czyli rozwiązując równanie $f'(x) = 0$. Warto zwrócić uwagę (dodatkowe punkty), że $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, więc f przyjmuje gdzieś na półprostej $(0, \infty)$ wartość najmniejszą.

Ciekawszy i szybszy sposób polega na skorzystaniu z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną (w jej najprostszej postaci: $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$):

$$\frac{a}{x^2} + bx^2 = 2\frac{\frac{a}{x^2} + bx^2}{2} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{x^2} \cdot bx^2} = 2\sqrt{ab} \ .$$

Jeśli się jeszcze wie, że równość zachodzi dla równych liczb, to szukane x spełnia równanie $\frac{a}{x^2} = bx^2$, z czego otrzymujemy $x = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$.

Wariant 1. Niech $f(x) = 4 - x^2$. Któy z prostokątów o wierzchołkach $P_1 = (-x, 0)$, $P_2 = (-x, f(-x))$, $P_3 = (x, f(x))$, $P_4 = (x, 0)$ (gdzie $x \in [0, 2]$) ma największą powierzchnię?

Komentarz: Wystarczy zauważyć, że pole tego prostokąta wyraża się funkcją $f(x) = 2x(4-x^2)$. Teraz wystarczy tę funkcję zróżniczkować i wyznaczyć miejsce zerowe pochodnej (wyjdzie $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ i pole to wynosi $\frac{32}{3\sqrt{3}}$).

Zadanie 4

Wariant 0. Niech $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Oblicz pole figury

$$A = \{(x, y) : -1 \leqslant x \leqslant x \wedge f(x) \leqslant y \leqslant 1\} \ .$$

Rozwiązanie. Należy (to jest ważne) zacząć od pokazania, że $f(x) \leqslant 1$ dla dowolnego x (można to zrobić na wiele sposobów: można policzyć maksimum za pomocą pochodnej, lub zauważyć, że $0 \leqslant (1-x)^2$, więc $2x \leqslant 1 + x^2$, więc $\frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$, więc $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$).

A teraz można policzyć pole A jako $\int_{-2}^{2}(1 - f(x))dx = \ldots$

A jeśli się zauważy, że funkcje f jest nieparzysta, a z tego wyciągnie wniosek $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$, to bez liczenia całki otrzymuje się, że pole A jest równe 4.

Wariant 1. Oblicz pole obszaru

$$A = \{(x, y) : \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \leqslant 1 \wedge x + y \geqslant 0\} \ .$$

Szkic rozwiązania: Warto zacząć od naszkicowania zbiorów $\{(x, y) : \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|} \leqslant 1\}$ oraz $\{(x, y) : x + y \geqslant 0\}$. Wtedy zauważy się, że szukane pole jest równe podwojonemu polu zbioru

$$\{(x, y) : 0 \leqslant x \wedge 0 \leqslant y \wedge \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant 1\},$$

czyli zadanie sprowadza się do wyliczenia

$$2 \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 dx = \ldots = \frac{1}{3} \; .$$

Zadanie 5

Pokaż, że jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, to istnieje k takie, że $a_k = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ lub istnieje k takie, że $a_k = \inf\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$.

Rozwiązanie. Niech $g = \lim_n a_n$. Jeśli $(\forall \epsilon > 0)(\{n : |a_n - g| \geqslant \epsilon\} = \emptyset)$, to ciąg (a_n) jest stały i wtedy mamy, np. $a_0 = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$.

Załóżmy więc, że istnieje $\epsilon > 0$ takie, że $\{n : |a_n - g| \geqslant \epsilon\} \neq \emptyset$. Niech $A = \{n : a_n \geqslant g + \epsilon\}$ i $B = \{n : a_n \leqslant g - \epsilon\}$. Oba te zbiory są skończone (to wynika ze zbieżności ciągu do g) i co najmniej jeden z nich jest niepusty (bo $A \cup B = \{n : |a_n - g| \geqslant \epsilon\}$).

Załóżmy, że $A \neq \emptyset$. Wybieramy $k \in A$ takie, że $a_k = \max_{n \in A} a_n$. Wtedy $a_k = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$. Jeśli $A = \emptyset$, to wtedy $B \neq \emptyset$; znajdujemy $k \in B$ takie, że $a_k = \min_{n \in A} a_n$. Wtedy $a_k = \inf\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$.