Analiza Matematyczna I

przykładowe zadania na egzamin dla fizyków

Jacek Cichoń
Politechnika Wrocławska
WPPT

21 stycznia 2018

Uwaga: możecie się posługiwać dowolnym pakietem matematycznym; możecie korzystać z internetu. ALE: wszystkie rozwiązania muszą być w pełni uzasadnione. CZYLI: odpowiedź: "tak mi policzył serwis Wolfram Alpha" nie jest wystarczająca.

Zadanie 1

Wariant a**.** Wyznacz granicę ciągu $a_n = (1 + \frac{\sin(n)}{n})^{\frac{\ln(2^n+1)}{n}}$.
Wariant b**.** Wyznacz granicę ciągu $a_n = \frac{\ln(e^n+n)+n}{n}$.
Wariant c**.** Wyznacz granicę ciągu $a_n = \frac{1+2n+(1+\frac{1}{2n})^n \cdot n^2}{n(n+1)}$.
Wariant d**.** Oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt{\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}}$

Zadanie 2

Wariant a. Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = 1 + \frac{e^x}{x(x-2)}$$

Wariant b. Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{1 - x^2}$$

Wariant b. Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

Zadanie 3

Wariant a**.** Rozważamy prostokąty o wierzchołkach w punktach $A = (0, 0)$, $B = (0, x)$, $C = (x, y)$ i $D = (0, y)$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ oraz $\frac{x^2}{4}+y^2 = 1$. Który z tych prostokątów ma największą powierzchnię? Wyznacz ile ona wynosi.
Wariant b**.** Zaprojektuj otwarte od góry pudełko o kształcie prostopadłościanu o podstawie o bokach a i $2a$, którego objętość ma 1000 cm^3 i które ma najmniejszą powierzchnię (nie uwzględniamy ściany górnej)

Zadanie 4

Wariant a**.** Niech $f(x) = x^2 - 1$ oraz $g(x) = 1 - x - 2x^2$. Sporządź rysunek obszaru $S = \{(x, y) : f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$ oraz oblicz jego powierzchnię.
Wariant b**.** Oblicz pole obszaru

$$C = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \wedge \cos(x) \leqslant y \leqslant \sin(x)\} \ .$$

Wariant c**.** Wyznacz następującą całkę nieoznaczoną $\int x(e^x + \ln(x))dx$.
Wariant d**.** Oblicz całkę $\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.
Wariant e**.** Niech $a > 0$. Wyznacz całkę $\int_0^{\frac{\pi}{a}} x^2 \sin(ax)dx$.

Zadanie 5

Wariant a. Pokaż, że funkcja $f(x) = \arctan(x)$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.
Wariant b. Pokaż, że jeśli funkcje f i g są całkowalne we Riemana na $[a, b]$ to również $f + g$ jest całkowalna według Riemana na $[a, b]$
Wariant c. Znajdź ciąg funkcji $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ które są całkowalne w sensie Riemana zaś funkcja $h(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ jest dobrze określona (dla dowolnego $x \in [0, 1]$) i nie jest całkowalna w sensie Riemana.
Wariant d. Pokaż, że zbiór punktów skupienia dowolnego ciągu liczb rzeczywistych jest zbiorem domkniętym.
Wariant e. Niech $\{U_t : t \in T\}$ będzie dowolną rodziną podzbiorów otwartych zbioru liczb rzeczywistych. Niech $U = \bigcup\{U_t : t \in T\}$. Pokaż, że U jest zbiorem otwartym.
Wskazówka:

$$(x \in U) \equiv (\exists t \in T)(x \in U_t)$$