

Analiza Matematyczna I dla Fizyki na WPPT Lista zadań

Jacek Cichoń, WPPT, PWt, 2017/18

Zadania oznaczone * są nieco trudniejsze od zadań bez gwiazdki. Zadania oznaczone ** są jeszcze trudniejsze.

1 Wstęp

1.1 Logika, zbiory i notacja matematyczna

Zadanie 1 — Niech p, q, r będą zmiennymi zdaniowymi. Pokaż, że:

1. $\models (\neg(p \wedge \neg p))$,
2. $\models (p \vee \neg p)$,
3. $\models ((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ (łączość spójników \vee)
4. $\models ((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$,
5. $\models ((p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$,
6. $\models (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ (prawo eliminacji implikacji),
7. $\models (\neg(p \rightarrow q)) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$.

Podaj interpretację dwóch pierwszych tautologii.

Uwaga: $\models \phi$ oznacza, że ϕ jest tautologią.

Zadanie 2 — Pokaż, że jeśli Jan umie fizykę i Jan nie umie fizyki, to Jan umie biologię.

1. Sformułuj odpowiednią tautologię.
2. Podaj inne przykłady zastosowania tej tautologii.

Zadanie 3 — Niech $\phi \equiv \psi$ oznacza, że $\models (\phi \leftrightarrow \psi)$. Pokaż, że dla dowolnych zdań ϕ, ψ, η mamy

1. $\phi \equiv \phi$ (zwrotność)
2. Jeśli $\phi \equiv \psi$ to $\psi \equiv \phi$ (symetria)
3. Jeśli $\phi \equiv \psi$ oraz $\psi \equiv \eta$ to $\phi \equiv \eta$ (przechodność).

Zadanie 4 — Pokaż, że spójniki $\rightarrow, \wedge, \leftrightarrow$ możesz zdefiniować za pomocą spójników \vee oraz \neg . Pokaż również, że spójniki $\rightarrow, \vee, \leftrightarrow$ możesz zdefiniować za pomocą spójników \wedge oraz \neg .

Zadanie 5 — Zapisz, stosując notację matematyczną, następujące zdania i formuły:

1. p jest liczbą pierwszą,
2. istnieje najmniejsza liczba naturalna,
3. nie istnieje największa liczba naturalna,
4. nie istnieje najmniejsza liczba rzeczywista dodatnia.

Zastosuj znane prawa logiki do uproszczenia tych wyrażeń.

Zadanie 6 — Podaj interpretację następujących zdań

1. $(\forall x \in (0, \infty))(\exists n \in \mathbb{N})(\frac{1}{n} < x)$,
2. $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$,
3. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x < y \vee x = y \vee x > y)$,

4. $(\forall a \in \mathbb{N})(\exists x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N})(a = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$,
5. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(y \leq x)$.

Zadanie 7 — Niech $R(x, y)$ oznacza, że "x jest rodzicem y". Niech $K(x)$ oznacza, że "x jest kobietą". Zdefiniuj, korzystając z notacji matematycznej oraz predykatów R i K , następujące **predykaty**:

1. "x jest dziadkiem y",
2. "x jest siostrą y",
3. "x jest bratem y",
4. "x jest ciotką y".

1.2 Zbiory

Zadanie 8 — Niech $A = [0, 2]$ oraz $B = [1, 3)$. Wyznacz zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$.

Zadanie 9 — Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ oraz $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x, y < \frac{3}{2}\}$. Wyznacz zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$.

Zadanie 10 — Odcinkiem nazywamy dowolny podzbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że

$$(\forall a, b, c) (((a < b < c) \wedge (a \in A) \wedge (c \in A)) \rightarrow b \in A) .$$

Spróbuj opisać rodzinę wszystkich odcinków.

Zadanie 11 — Niech $A, B \subseteq \Omega$ oraz niech X^c oznacza dopełnienie zbioru $X \subseteq \Omega$ do przestrzeni Ω . Udowodnij prawa de Morgana dla zbiorów A i B , czyli pokaż, że

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Pokaż również, że

3. $(A^c)^c = A$

Zadanie 12 — Wymień wszystkie poznane do tej pory warianty praw de Morgana.

Zadanie 13 — Niech A i B będą zbiorami. Pokaż, że następujące zdania są równoważne:

1. $A \subseteq B$
2. $A \cup B = B$
3. $A \cap B = B$.

* **Zadanie 14** — Mamy ustalone dwa zbiory $A, B \subseteq \Omega$. Ile zbiorów możesz zdefiniować z tych zbiorów za pomocą operacji \cup, \cap, \setminus oraz c (dopełnienie do zbioru Ω). Uogólnij to zadanie na trzy zbiory.

** **Zadanie 15** — (**Paradox Russela**) Pokaż, że nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów. **Wskazówka:** Załóż, że Ω jest zbiorem wszystkich zbiorów. Rozważ zbiór $X = \{x \in \Omega : x \notin x\}$. Zbadaj zdanie $X \in X$.

Uwaga: Spostrzeżenie Russela było impulsem do sformułowania Aksjomatycznej Teorii Mnogości. Obecnie najbardziej popularną aksjomatyką jest Teoria Mnogości Zermelo-Fraenkel'a.

1.3 Podstawowe zbiory liczbowe

Zadanie 16 — Uprość następujące wyrażenia:

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}, \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{5}}, \frac{1}{1 + \sqrt{5}}$
2. $(2^4)^2, 2^{(4^2)}$

Zadanie 17 — Niech $a, b, c > 0$ i $a \neq 1$. Udowodnij następujące własności funkcji logarytmicznych:

1. $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$
2. $\log_a(b^k) = k \log_a(b)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{R}$

3. $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ dla $b \neq 1$.

Zadanie 18 — Uprość następujące wyrażenia:

- $\log_{10}(10^2 \cdot 5^4)$, $4^{\log_2(5)}$, $\log_3(27\sqrt{3})$
- $2^{2\log_4 + 3\log_8} 3$, $9^{\log_3} 5$

Zadanie 19 — Przypomnij sobie dowód tego, że $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Pokaż, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to \sqrt{p} jest liczbą niewymierną.

* **Zadanie 20** — Pokaż, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ jest taką liczbą naturalną, że $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ to istnieje liczba naturalna k taka, że $n = k^2$.

Zadanie 21 — Pokaż, że jeśli $q \in \mathbb{Q}$, to $\sqrt{2} + q \notin \mathbb{Q}$. Dla jakich liczb wymiernych $q \in \mathbb{Q}$ mamy $q\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$?

Zadanie 22 — Niech $a = 3.1415926535897932385 \dots$. Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy liczby

$$a_n = \frac{\lfloor a \cdot 10^n \rfloor}{10^n}.$$

Wyznacz pierwsze 10 wyrazów tego ciągu, tzn. oblicz liczby a_0, a_1, \dots, a_9 .

Uwaga: $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x .

Zadanie 23 — Pokaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x oraz y mamy

- $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- Z jakich własności liczb rzeczywistych korzystałeś/korzystałaś podczas dowodzenia tych wzorów?

Zadanie 24 — Dla jakich par liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość $(x + y)^2 = x^2 + y^2$?

Zadanie 25 — Pokaż metodą indukcji matematycznej, że

- $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$. **Uwaga:** Musisz również znać proste wyprowadzenie tego wzoru..
- $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$
- $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- $(\forall n \in \mathbb{N})(n < 2^n)$
- $(\forall n \geq 4)(n^2 < 2^n)$
- $(\forall n \geq 4)(2^n < n!)$
- $(\forall n \geq 1)(6 | (n^3 - n))$

Zadanie 26 — Pokaż, korzystając z poprzedniego zadania, że $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Podaj interpretację geometryczną tego faktu.

Zadanie 27 — Załóżmy, że $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ jest nieskończonym ciągiem liczb naturalnych. Pokaż, że $(\forall k \in \mathbb{N})(k \leq n_k)$.

Zadanie 28 — Wyznacz samodzielnie sześć pierwszych wierszy trójkąta Pascala. Wypisz wzory na $(x + y)^n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots, 5$.

Zadanie 29 — Pokaż, że jeśli $0 < k \leq n$, to $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$. Jak można tę obserwację wykorzystać do wyznaczenia wartości $\binom{n}{k}$?

* **Zadanie 30** — Symbolem $|X|$ oznaczamy liczbę elementów skończonego zbioru X . Niech X będzie n -elementowym zbiorem. Dla $k \leq n$ określamy

$$[X]^k = \{Y \subseteq X : |Y| = k\}.$$

1. Pokaż, że $|[X]^k| = \binom{n}{k}$.
2. Korzystając z poprzedniego wyniku podaj kombinatoryczne wyprowadzenie tożsamości Pascala $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
3. Symbolem $P(X)$ oznaczamy zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X . Pokaż, że jeśli $|X| = n$ to $|P(X)| = 2^n$.

Zadanie 31 — Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

pokaż, że

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ i podaj interpretację kombinatoryczną tego faktu
2. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$.

Zadanie 32 — Narysuj wykres wartości $\binom{20}{k}$ dla $k = 0, \dots, 20$. Która z tych liczb jest największa? Uogólnij to spostrzeżenie dla ciągu liczb $\binom{n}{k}$ dla dowolnego n . **Wskazówka:** Możesz, np., skorzystać z funkcji **KOMBINACJE** programu Excel.

Zadanie 33 — Pokaż, że $\binom{a+b}{k} = \sum_{l=0}^k \binom{a}{l} \binom{b}{k-l}$.

1.4 Liczby rzeczywiste

Zadanie 34 — Za pomocą wyszukiwarki Google narysuj wykresy różnych funkcji kwadratowych (np. wprowadź w pasku zapytań wyrażenie $x^2 - 5x + 1$). Zapoznaj się z linkami umieszczonymi na stronie <http://ki.pwr.edu.pl/StudenciOnlineTools.php>. Spróbuj narysować wykresy funkcji kwadratowych za pomocą serwisu Wolfram Alpha.

Zadanie 35 — Wyznacz następujące zbiory:

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 > 0\}$,
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$,
3. $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$,
4. $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 > 0\}$.

* **Zadanie 36** — Sformułuj samodzielnie pojęcie kresu dolnego podzbioru A zbioru liczb rzeczywistych - oznaczmy go przez $\inf(A)$. Pokaż, że $\inf(A) = -\sup(-A)$, gdzie $-A = \{-a : a \in A\}$. Wywnioskuj z tego, że każdy ograniczony z dołu podzbiór \mathbb{R} ma kres dolny.

Zadanie 37 — Wyznacz kresy dolne i górne następujących zbiorów:

1. $\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$
2. $(0, 1) \cup (3, 4]$
3. $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$
4. $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$
5. \mathbb{N}
6. \mathbb{Z}

* **Zadanie 38** — Niech $A = \{x \geq 0 : x^2 < 2\}$. Pokaż, że $\sup(A)^2 = 2$ (czyli, że $\sup(A) = \sqrt{2}$).

Zadanie 39 — Korzystając z tego, że $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ pokaż, że $|\sin(x) + 2\cos(x)| \leq \sqrt{5}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. **Wskazówka:** Skorzystaj z nierówności Cauchy'ego.

Zadanie 40 — Pokaż, że dla dowolnego ciągu liczb a_1, \dots, a_n zachodzi nierówność

$$a_1 + \dots + a_n \leq \sqrt{n} \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

2 Ciągi liczb rzeczywistych

Zadanie 41 — Pokaż, że ciąg $(1 - \frac{1}{n})^n$ jest ograniczony.

Zadanie 42 — Oblicz granice następujących ciągów: $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$, $b_n = \frac{2^n+1}{2^n+3}$, $c_n = \frac{2n^2+n+3}{n^2+3n+1}$, $d_n = \frac{3n^2+n+5}{n^2+n+1}$,
 $e_n = \frac{n^3+n+3}{n^2+3n+3}$, $f_n = \frac{-n^3+2n+2}{n^2+2n+1}$, $g_n = \frac{2n^2+n+3}{n^5+3n+2}$, $h_n = \frac{n^2+n+3}{n^3+n^2+1}$.

Zadanie 43 — Dlaczego ciąg $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ nie jest zbieżny?

Zadanie 44 — Dlaczego ciąg $a_n = (-2)^n$ nie jest zbieżny?

Zadanie 45 — Bezpośrednio z definicji granicy ciągu pokaż, że $\lim_n \frac{n+2}{n} = 1$, $\lim_n \frac{2n+1}{n^2} = 0$ oraz $\lim_n (n - \sqrt{n}) = \infty$.

Zadanie 46 — Oblicz granice $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$.

Zadanie 47 — Oblicz granice ciągów

1. $a_n = \frac{n+(-1)^n}{2n+1}$,
2. $b_n = \sqrt[n]{n^n + 1}$,
3. $c_n = \sqrt[n]{n2^n + n}$.

Zadanie 48 — Pokaż, że ze zbieżności ciągu (a_n) wynika zbieżność ciągu $(|a_n|)$. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?

Zadanie 49 — Ustalmy liczbę a . Wyznacz granicę ciągu $a_n = \frac{|na|}{n}$.

Zadanie 50 — Pokaż, że jeśli $|a| < 1$ to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a + \dots + a^n) = \frac{1}{1 - a}.$$

Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru na $1 + q + q^2 + \dots + q^n$.

Zadanie 51 — Niech $a_0 = 1$ oraz $a_{n+1} = 3 + \frac{a_n}{2}$.

1. Pokaż, stosując metodę indukcji matematycznej, że $a_n < 6$ dla każdego n .
2. Pokaż, że ciąg (a_n) jest rosnący
3. Wyznacz granicę tego ciągu.

Zadanie 52 — Ustalmy liczbę $a > 0$. Niech $x_0 = a$ oraz $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$. Pokaż, że $\lim_n x_n = \sqrt{a}$. Zastosuj ten wyniki dla $a = 2$. Który wyraz tak zbudowanego ciągu różni się od $\sqrt{2}$ o mniej niż 10^{-3} ?

Zadanie 53 — Niech $a_0 = 1$ oraz $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$. Pokaż, że ciąg (a_n) jest rosnący i ograniczony oraz znajdź jego granicę.

Zadanie 54 — Oblicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$. **Wskazówka:** Skorzystaj ze wzoru $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Zadanie 55 — Oblicz granicę następujących ciągów

1. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{3n+1}$,
2. $b_n = (1 - \frac{1}{n})^{2n+1}$,
3. $c_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$,
4. $d_n = (\frac{n-1}{n+1})^{n+1}$,
5. $e_n = (1 + \frac{1}{n^2})^n$.

Zadanie 56 — Oblicz następujące granice: $\lim_n \sqrt[n]{5^n + 1}$, $\lim_n \sqrt[n]{n3^n + 2}$.

Zadanie 57 — Załóżmy, że $0 \leq a \leq b$. Wyznacz granicę ciągu $\sqrt[n]{a^n + b^n}$.

Zadanie 58 — Załóżmy, że $\lim_n a_n = 0$. Pokaż, że wtedy $\lim_n |a_n| = 0$.

Zadanie 59 — Oblicz granicę $\lim_n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru $a - b = (a^2 - b^2)/(a + b)$.

Zadanie 60 — Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wyznacz granice następujących ciągów:

1. $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+n} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$
2. $b_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$
3. $c_n = \sqrt[n]{\frac{3^n+4^n}{4^n+5^n}}$.

Zadanie 61 — Niech $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Pokaż, że $\lim_n H_n = \infty$.

Wskazówka: Pokaż najpierw, że ciąg (H_n) jest rosnący. Przyjrzyj się następnemu takiemu pogrupowaniu: $H_8 = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8})$. Zapisz w podobny sposób H_{16} . Spróbuj oszacować od dołu każdy z pogrupowanych składników.

2.1 Domknięcie zbioru

Zadanie 62 — Ustalmy dodatnią liczbę naturalną C . Niech $a_n = (n \bmod C) + \frac{1}{n}$. Wyznacz punkty skupienia ciągu (a_n) .

Zadanie 63 — Podaj przykład ciągu, który ma nieskończenie wiele punktów skupienia.

* **Zadanie 64** — Podaj przykład ciągu, którego zbiorem punktów skupienia jest odcinek $[0, 1]$.

** **Zadanie 65** — Czy istnieje ciąg, którego zbiorem punktów skupienia jest zbiór $[0, 1)$?

Zadanie 66 — Korzystając z Zadania 49 pokaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a

1. istnieje ciąg liczb wymiernych (a_n) taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
2. istnieje ciąg liczb niewymiernych (b_n) taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$

Zadanie 67 — Pokaż, że

1. $(\forall a, b \in \mathbb{R})(a < b \rightarrow (\exists x \in \mathbb{Q})(a < x < b))$
2. $(\forall a, b \in \mathbb{R})(a < b \rightarrow (\exists x \notin \mathbb{Q})(a < x < b))$

Uwaga: Wymienione własności można sformułować następująco: (1) zbiór liczb wymiernych jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych; (2) zbiór liczb niewymiernych jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zadanie 68 — Wyznacz domknięcia następujących zbiorów i sprawdź, który z tych zbiorów jest domknięty i ograniczony:

1. $\emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{R}$
2. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}, [0, 1) \setminus \mathbb{Q}$.

3 Granice i ciągłość

Zadanie 69 — Wyznacz wartości funkcji \sin , \cos , \tan i \cot dla kątów $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

Zadanie 70 — Pokaż, że $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$, $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ oraz $\tan(x + \frac{\pi}{2}) = -\cot(x)$.

Zadanie 71 — Korzystając ze wzorów $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$ oraz $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ wyprowadź wzory na $\sin(2x)$, $\sin(3x)$, $\cos(2x)$, $\cos(3x)$.

Zadanie 72 — Narysuj, korzystając z przeglądarki Google, wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$ oraz $g(x) = \cos(x)^2$. Wyjaśnij zaobserwowane zjawisko.

Zadanie 73 — Naskicuj wykresy funkcji $f_k(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot \sin(k \cdot x)$ dla $k = 1, 10, 100, 200$.

Zadanie 74 — Naskicuj na wspólnym wykresie wykresy funkcji $f(x) = |x| + \sqrt{1-x^2} - 1$ oraz $g(x) = |x| - \sqrt{1-x^2} - 1$.

Zadanie 75 — Naskicuj na wspólnym wykresie wykresy funkcji $f(x) = (|x| + \sqrt{1-x^2} - 1) \cos^2(200x)$ oraz $g(x) = (|x| - \sqrt{1-x^2} - 1) \cos^2(200x)$.

Zadanie 76 — Niech $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$.

1. Wyznacz następujące granice: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$.
2. Naskicuj wykres tej funkcji.

Zadanie 77 — Niech

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & : x < 0 \\ 0 & : x = 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases}$$

1. Pokaż, że funkcja sgn nie jest ciągła w punkcie 0.
2. Wyznacz punkty ciągłości funkcji sgn .

Zadanie 78 — Wyznacz punkty ciągłości następujących funkcji

1. $f_1(x) = \operatorname{sgn}(\sin(x))$,
2. $f_2(x) = \operatorname{sgn}(\cos(x))$,
3. $f_3(x) = \lfloor x \rfloor$
4. $f_4(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.

Zadanie 79 — Niech

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Pokaż, że funkcja f nie jest ciągła w żadnym punkcie.

Wskazówka: Skorzystaj z zadania 66.

Zadanie 80 — Korzystając z definicji Cauchy'ego ciągłości funkcji pokaż, że suma dwóch funkcji ciągłych w punkcie x_0 jest ciągła w punkcie x_0 .

Zadanie 81 — Korzystając z definicji Cauchy'ego ciągłości funkcji pokaż, że funkcja $f(x) = x^3$ jest ciągła.

Zadanie 82 — Załóżmy, że istnieje $\eta > 0$ taka, że $(\forall x)(|x - x_0| < \eta \rightarrow f(x) = g(x))$. Pokaż, że jeśli f jest ciągła w punkcie x_0 to również g jest ciągła w punkcie x_0 . Dlaczego pokazaną własność funkcji ciągłych możemy wysłowić następująco: *ciągłość funkcji w punkcie jest pojęciem lokalnym*?

Zadanie 83 — Narysuj wykresy funkcji zadanych wzorami $y = \frac{x}{x-1}$, $y = x - \lfloor x \rfloor$, $y = x \sin(\frac{1}{x})$, $y = x^2 \sin(\frac{1}{x})$, $y = \frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x})$ oraz wyznacz ich granice w punkcie 0.

Zadanie 84 — Naskicuj wykresy funkcji zadanych wzorami:

1. $y = \frac{1}{x^2-1}$,
2. $y = \frac{x}{x^2-1}$,
3. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$,
4. $y = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Zadanie 85 — Niech $n > 0$. Naskicuj wykres funkcji zadanej wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1) \cdots (x-n)}.$$

Wskazówka: rozważ oddzielnie przypadek n parzystego i n nieparzystego.

* **Zadanie 86** — Pokaż, że dla każdego naturalnego $n \geq 1$ mamy

$$\frac{1}{x(x-1)\cdots(x-n)} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{x-k}$$

Zadanie 87 — Oblicz następujące granice:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x}$,
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$,
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$.

Zadanie 88 — Załóżmy, że funkcja f jest ciągła. Pokaż, że funkcja $g(x) = |f(x)|$ jest również ciągła. **Wskazówka:** skorzystaj z tego, że złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Zadanie 89 — Oblicz granice wielomianu postaci $w(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ w nieskończoności oraz w minus nieskończoności. **Wskazówka:** Rozważ oddzielnie przypadek n parzystego oraz n nieparzystego.

Zadanie 90 — Pokaż, że każdy wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek.

Wskazówka: Skorzystaj z poprzedniego zadania oraz własności Darboux funkcji ciągłych.

Zadanie 91 — Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe. Niech $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Pokaż, że h jest funkcją ciągłą.

Zadanie 92 — Załóżmy, że $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ jest funkcją ciągłą. Pokaż, że istnieje takie $x \in [0, 1]$, że $f(x) = x$. **Wskazówka:** Przyjrzyj się funkcji $g(x) = f(x) - x$.

Uwaga: Jest to prosty przykład twierdzenia o punkcie stałym.

Zadanie 93 — Niech $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami rosnącymi. Pokaż, że złożenie $f \circ g$ jest funkcją rosnącą.

Zadanie 94 — Naskicuj wykresy funkcji $f_1(x) = (\frac{1}{2})^x$, $f_2(x) = 1^x$, $f_3(x) = 2^x$, $f_4(x) = e^x$ oraz $f_5(x) = 3^x$.

Zadanie 95 — Naskicuj wykresy funkcji $f_1(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$, $f_3(x) = \log_2(x)$, $f_4(x) = \log_e(x)$ oraz $f_5(x) = \log_3(x)$.

Zadanie 96 — Pokaż, że każda funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest sumą funkcji **parzystej** i nieparzystej.

Wskazówka: Rozważ funkcje $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ oraz $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

Zadanie 97 — Niech $f(x) = \sin(x)$ oraz $g(x) = x^2$.

1. Naskicuj wykres funkcji $f \circ g$.
2. Naskicuj wykres funkcji $g \circ f$.

Zadanie 98 — Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

1. Sprawdź, że $x^2 + 1 = (x-1)(x+1) + 2$. Korzystając z tego wzoru przedstaw funkcję f jako sumę funkcji liniowej oraz pewnej prostej funkcji wymiernej.
2. Korzystając z poprzedniego punktu naskicuj ponownie wykres funkcji f .
3. Zapoznaj się z pojęciem **asymptoty ukośnej**.

Zadanie 99 — Podaj przykład ciągłej funkcji $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ która nie osiąga wartości maksymalnej.

Zadanie 100 — Pokaż przykład takiej funkcji ciągłej $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ która nie jest ograniczona z góry ani z dołu.

Zadanie 101 — Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła oraz niech $a \in \mathbb{R}$.

1. Pokaż, że zbiór $f^{-1}([a, \infty)) = \{x : f(x) \geq a\}$ jest zbiorem domkniętym.
2. Pokaż, że zbiór $f^{-1}(\{a\}) = \{x : f(x) = a\}$ jest zbiorem domkniętym.
3. Pokaż, że zbiór $f^{-1}((a, \infty)) = \{x : f(x) > a\}$ jest zbiorem otwartym.

* **Zadanie 102** — Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, oraz, że $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Pokaż, że istnieje $x_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$.

** **Zadanie 103** — Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(f(x + y) = f(x) + f(y)).$$

Pokaż, że $f(x) = a \cdot x$ dla $a = f(1)$. **Wskazówka:** Zaczynij od pokazania, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $f(n) = a \cdot n$. Pokaż następnie, że $f(-x) = -f(x)$. Potem się zajmij liczbami wymiernymi. A na końcu skorzystaj z ciągłości.

4 Pochodne

Zadanie 104 — Oblicz pochodne następujących funkcji:

1. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1, g(x) = 2x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 1$
2. $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{x}{x^2+1}, h(x) = \frac{x^2}{x^3-x+1}$
4. $f(x) = (x^2 + 2x + 1)(x^3 + 2x^2 + 1)$
5. $f(x) = (x + 1)/(x - 1), g(x) = \frac{x^2+x+1}{x^3-1}$
6. $f(x) = xe^x, g(x) = x^2e^x, h(x) = x^3e^x$. **Wskazówka:** $(e^x)' = e^x$.

Zadanie 105 — W jakich punktach funkcja $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$ jest różniczkowalna?

Zadanie 106 — Znajdź przykład ciągłej funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która nie różniczkowalna w nieskończonej liczbie punktów.

Zadanie 107 — W jakich przedziałach funkcje $y = x(1 - x)^2, y = xe^{-x}, y = x^2e^{-x}$ są rosnące?

Zadanie 108 — Zbadaj wykresy funkcji $y = x^2e^x, y = \frac{x}{1+x^2}, y = \frac{2x^2}{(x-1)(x-2)}$.

Zadanie 109 — Niech $\sigma(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ oraz $\zeta(x) = \ln(1 + e^x)$.

1. Zbadaj przebieg zmienności funkcji σ i ζ .
2. Pokaż, że $\sigma'(x) = \sigma(x)(1 - \sigma(x))$.
3. Pokaż, że $\zeta'(x) = \sigma(x)$.
4. Pokaż, że $\ln \sigma(x) = -\zeta(-x)$.

Zadanie 110 — Znajdź ekstrema funkcji $y = x(a - x), y = x(a - x)^2$.

Zadanie 111 — Pokaż, że jeśli funkcje f, g i h są różniczkowalne w punkcie x , to

$$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x).$$

Zadanie 112 — Niech

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} ax + b & : x < -1 \\ x^2 & : x \geq -1 \end{cases}$$

Znajdź takie parametry a i b aby funkcja $f_{a,b}$ była różniczkowalna w każdym punkcie.

Zadanie 113 — Oblicz pochodne następujących funkcji:

1. $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$,
2. $y = \sin(x^2)$,
3. $y = e^{x^2}$,
4. $y = (e^{x^2} + 1)^2$,
5. $y = 2^{\sin(x)}$,

6. $y = \tan^2(x)$,
7. $y = \ln(x^2 + 1)$, $y = \log \tan(x)$
8. $y = \ln \frac{1}{1+x^2}$,
9. $y = \arcsin(e^x)$, $y = \arccos(x^2)$
10. $y = \arctan(x^2 + 1)$, $y = \arctan(e^x)$
11. $\sin(\sin(x))$, $\sin(\sin(\sin(x)))$
12. $\sin(\cos(\sin(x)))$

Zadanie 114 — Oblicz pierwsze i drugie pochodne funkcji $f(t) = r \sin(\omega t)$ i $g(t) = r \cos(\omega t)$.

Zadanie 115 — Zbadaj przebieg zmienności następujących funkcji:

1. $f(x) = x^3 e^{-x}$.
2. $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$
3. $f(x) = x^2 \ln(x)$
4. $f(x) = 2 \ln(x^2 + 1) + x$
5. $y = \frac{e^x}{x}$,
6. $y = \frac{x}{1+x^2}$,
7. $y = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$.

Zadanie 116 — Dlaczego funkcja $y = \ln x$ ($x > 0$) jest ciągła? Podaj możliwie prosty argument.

Zadanie 117 — Napisz równania stycznych i prostopadłych do podanych funkcji w podanych punktach:

1. $f(x) = \ln(x + e^x)$, $P = (0, f(0))$,
2. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $P = (1, f(1))$.

* **Zadanie 118** — Rozważmy następującą funkcję

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{t}) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

1. Pokaż, że funkcja f jest ciągła.
2. Pokaż, że dla każdego $n \geq 0$ istnieje taki wielomian $w(x)$, że $f^{(n)}(t) = w(\frac{1}{t}) \exp(-\frac{1}{t})$.
3. Pokaż, że dla każdego $n > 0$ mamy $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\exp(-\frac{1}{t})}{t^n} = 0$
4. Pokaż, że dla każdego $n \geq 0$ istnieje pochodna $f^{(n)}(0)$ i jest równa 0
5. Zastosuj wzór Taylora dla funkcji f w punkcie 0.

Zadanie 119 — Pokaż, że

1. $\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $\arctan x = \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2}$

Wskazówka: Oblicz pochodne obu stron.

Zadanie 120 — (**Wzór Leibnitza**) Załóżmy, że f i g są funkcjami n krotnie różniczkowalnymi. Pokaż, że

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

4.1 Zastosowania

Zadanie 121 — Który z punktów paraboli $y = x^2$ leży najbliżej prostej $x - y - 5 = 0$?

Wskazówka: Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $ax + by + c = 0$ wyraża się wzorem

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Zadanie 122 — Znajdź pole największego prostokąta o bokach równoległych do osi układu współrzędnych wpisanego w elipsę o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Zadanie 123 — Pokaż, że ze wszystkich prostokątów o ustalonym obwodzie kwadrat ma największą powierzchnię.

Zadanie 124 — Pokaż, że ze wszystkich trójkątów o ustalonym obwodzie i o ustalonej podstawie trójkąt równoramienny ma największą powierzchnię.

Zadanie 125 — Pokaż, że ze wszystkich trójkątów o ustalonym obwodzie trójkąt równoboczny ma największą powierzchnię.

Zadanie 126 — Załóżmy, że $f'(t) = f(t)$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Pokaż, że istnieje taka stała C , że $f(t) = C \cdot e^t$.
Wskazówka: Oblicz pochodną funkcji $g(t) = \frac{f(t)}{e^t}$. **Uwaga:** Rozwiązaliśmy w ten sposób równanie różniczkowe $x'(t) = x(t)$.

Zadanie 127 — Pokaż, że dla każdego $x > 0$ mamy $\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

4.2 Reguła de l'Hospitala

Zadanie 128 — Korzystając z reguł de l'Hospitala oblicz następujące granice:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{2x} - x}{1 - \cos(3x)}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^3}{n}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1 - \cos(x)) - \ln(x^2))$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{3}{x})^{2x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x^2}}{x}$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + 1)^{\frac{1}{x}}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0+} x^3 \ln x$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x}$
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}$,
13. $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln(x)$,
14. $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$. **Wskazówka:** skorzystaj z tego, że $t = e^{\ln t}$ dla dowolnego $t > 0$, oraz, że funkcja $f(x) = e^x$ jest ciągła.
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

Zadanie 129 — Wyznacz, dla dowolnego ustalonego naturalnego k , granice $\lim_n \frac{(\ln(n))^k}{n}$, $\lim_n \frac{2^n}{n^k}$.

4.3 Wzór Taylora

Zadanie 130 — Niech $f(x) = 1 + x + x^2$. Zastosuj wzór Taylora rzędu 3 dla funkcji f w punktach $x = 0$ oraz $x = 1$.

Zadanie 131 — Wyznacz wielomiany Taylora rzędu 10 następujących funkcji $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin(x)$, $h(x) = \cos(x)$, $j(x) = \sin(x) + \cos(x)$. Za pomocą dowolnego pakietu narysuj na jednym wykresie przybliżenia

Zadanie 132 — Za pomocą wzoru Taylora oblicz $\sin(0.1)$ z dokładnością do 10^{-10} .

5 Całki

Zadanie 133 — Oblicz następujące całki: $\int_0^1 (x^3 + x^2 + x) dx$, $\int_0^1 (x + \sqrt{x}) dx$, $\int_0^\pi (2 \sin(x) + \sin(x)) dx$.

Zadanie 134 — Wyznacz, bez wykonywania żadnych obliczeń, następujące całki: $\int_{-1}^1 x^3 dx$, $\int_{-1}^1 (x + x^5) dx$,
 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x) dx$

Zadanie 135 — Niech $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Pokaż, że

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(x) dx} \sqrt{\int_a^b g(x) dx}.$$

Wskazówka: Rozważ funkcję $\phi(t) = \int_a^b (f(x) - tg(x))^2 dx$.

Zadanie 136 — Niech $G(c) = \int_1^c \frac{1}{x^2} dx$.

1. Zakładając, że $c > 1$ wyznacz $G(c)$
2. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} G(c)$
3. Podaj interpretację geometryczną otrzymanego wyniku.

Zadanie 137 — Wyznacz, stosując metodę całkowania przez części, następujące całki nieoznaczone:

1. $\int x \cos(x) dx$, $\int x^2 \cos(x) dx$, $\int x^3 \cos(x) dx$
2. $\int x \sin(x) dx$, $\int x^2 \sin(x) dx$, $\int x^3 \sin(x) dx$
3. $\int x e^x dx$, $\int x^2 e^x dx$, $\int x^3 e^x dx$
4. $\int x \ln x dx$, $\int x^2 \ln x dx$, $\int x^3 \ln x dx$

Spróbuj samodzielnie uogólnić powyższe obliczenia.

Zadanie 138 — Wyznacz, stosując metodę całkowania przez podstawienie, następujące całki nieoznaczone:

1. $\int \sin(3x + 1) dx$, $\int \frac{x}{x+1} dx$, $\int x \sqrt{1+x^2} dx$ (podstaw $t = 1 + x^2$),
2. $\int \frac{1}{1+2x^2} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx$,
3. $\int x e^{-x^2} dx$
4. $\int \sin(\ln x) dx$ (podstaw $u = \ln x$, zastosuj dwukrotnie całkowanie przez części)
5. $\int \tan x dx$

Zadanie 139 — Wyznacz pole następujących obszarów:

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi \wedge |y| \leq \sin x\}$,
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \wedge |y| < e^{-x}\}$.
4. Obszar ograniczony parabolą o równaniu $y = 2x^2 - 6x$ i osią OX

Zadanie 140 — Wyznacz pole elipsy zadanej równaniem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Zadanie 141 — Załóżmy, że f jest funkcją różniczkowalną oraz, że g jest funkcją ciągłą. Niech

$$H(x) = \int_a^{f(x)} g(t) dt.$$

Wyznacz $H'(x)$.

Wskazówka: Niech $F(x) = \int_a^x g(t) dt$. Zauważ, że $H(x) = F(f(x))$.

Zadanie 142 — Oblicz następujące całki nieoznaczone z funkcji wymiernych:

1. $\int \frac{2x+1}{3x+2} dx$
2. $\int \frac{1}{(x-2)(x+5)} dx$
3. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$
4. $\int \frac{1}{(x-2)^2} dx$
5. $\int \frac{1}{x(x^2-1)} dx$. Wskazówka: Wyznacz takie liczby A, B i C , że $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$.
6. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$. Wskazówka: Zastosuj podstawienie $x = \tan(u)$.
7. $\int \frac{1}{1+x^2} dx$,
8. $\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx$

Zadanie 143 — Rozważamy funkcję $f(x) = x^2$ na odcinku $[0, 1]$. Rozważamy sumę dolną

$$s_n(f, 0, 1) = \sum_{k=0}^{n-1} \inf \left\{ f(x) : \frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n} \right\} \frac{1}{n}.$$

1. Korzystając ze wzoru $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ wyznacz zwartą postać wzoru na $s_n(f, 0, 1)$
2. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, 0, 1)$
3. Oblicz $\int_0^1 x^2 dx$ za pomocą całki nieoznaczonej :-)

Zadanie 144 — Oblicz objętość torusa powstałego przez obrót koła $x^2 + (y-a)^2 \leq r^2$.

Zadanie 145 — Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót wykresu funkcji $f(x) = \sin(x)$ dla $x \in [0, 2\pi]$.

6 Szeregi

Zadanie 146 — Pokaż, że jeśli szeregi $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$ są zbieżne oraz a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, to szereg $\sum_n (a \cdot a_n + b \cdot b_n)$ jest zbieżny oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot a_n + b \cdot b_n) = a \sum_{n=0}^{\infty} a_n + b \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Zadanie 147 — Oblicz sumy $\sum_{n \geq n} (\frac{3}{2^n} + \frac{1}{3^n})$, $\sum_{n \geq 1} \sum_{k=2}^5 (\frac{1}{k})^n$

Zadanie 148 — Oblicz sumy $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+2)}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+3)}$.

Wskazówka: Znajdź liczby A i B takie, że $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$.

Zadanie 149 — Zbadaj zbieżność następujących szeregów: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Zadanie 150 — Zastosuj kryterium zbieżności d'Alamberta do zbadania zbieżności szeregów $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n+1}{3^n+1}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{2n^2}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Zadanie 151 — Wyznacz promienie zbieżności następujących szeregów potęgowych:

1. $\sum_n \frac{1}{n+2} x^n$
2. $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$

3. $\sum_n \frac{(-1)^n}{n} x^n$
4. $\sum_n n 2^n x^n$
5. $\sum_n \frac{1}{n^n} x^n$
6. $\sum_n \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$ (dla ustalonego naturalnego $k > 0$)

Zadanie 152 — Rozwiń następujące funkcje w szereg Maclaurina i wyznacz ich promienie zbieżności:

1. $f(x) = \sin(x)$
2. $g(x) = \cos(x)$
3. $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$
4. $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

Zadanie 153 — Niech d oznacza odległość zbieżności jednostajnej na odcinku $[0, 1]$, czyli

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\},$$

dla ograniczonych funkcji f i g . Wyznacz odległości $d(f, g)$ następujących par funkcji:

1. $f(x) = \sin(x), g(x) = \cos(x)$
2. $f(x) = x, g(x) = x(1-x)$

Zadanie 154 — Pokaż, że ciąg funkcji $f_n(x) = x + \frac{1}{n} \sin(nx)$ jest jednostajnie zbieżny na \mathbb{R} .

Zadanie 155 — Niech $f_n(x) = x^n + x$ dla $x \in [0, 1]$.

1. Pokaż, że ciąg funkcyjny (f_n) jest punktowo zbieżny
2. Czy ciąg ten jest jednostajnie zbieżny?

Zadanie 156 — Czy ciąg funkcji $f_n(x) = (1 + \frac{1}{n})x$ jest punktowo zbieżny? Czy jest jednostajnie zbieżny na \mathbb{R} ? Czy jest jednostajnie zbieżny na odcinku $[0, 1]$?

Zadanie 157 — Wyznacz szeregi Fouriera (na odcinku $[-\pi, \pi]$) następujących funkcji oraz narysuj ich wykresy oraz ich kilka pierwszych przybliżeń szeregami trygonometrycznymi:

1. $f(x) = |x|, g(x) = |x| + \sin(x)$
2. $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$
3. $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn})(x)$

Zadanie 158 — Wyznacz sinusowy szereg Fouriera funkcji $f(x) = x(\pi - x)$ na odcinku $[0, \pi]$. Skorzystaj z tego szeregu do wyznaczenia wartości szeregu

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \dots$$

Zadanie 159 — Wyznacz szereg Fouriera funkcji $f(x) = x^2$ na odcinku $[-\pi, \pi]$.

1. Podstawiaj za x liczbę π oblicz $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$
2. Wyznacz $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2}$
3. Wyznacz $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Powodzenia,
Jacek Cichoń