# Analiza Matematyczna II

przykładowe zadania na egzamin

Jacek Cichoń
Politechnika Wrocławska
WPPT

13 czerwca 2018

**Zadanie 1.** Niech $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n} x^n$. Wyznacz promień zbieżności tego szeregu potęgowego oraz oblicz $f(1)$.

**Zadanie 2.** Dla jakich wartości zmiennej $x$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}(x-1)^n$ jest zbieżny?

**Zadanie 3.** Pokaż, że dowolna funkcja ciągła na zbiorze $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \times [-1,1]$ przyjmuje wartość maksymalną w jakimś punkcie tego zbioru.

**Zadanie 4.** Wyznacz punkty skupienia ciągu

$$a_n = \left( \frac{(-1)^n n}{n+1}, (-1)^{n+1}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n+1}, \frac{2^n}{1+2^n} \right) .$$

**Zadanie 5.** Niech $f(x,y) = (xy, x^2-y^2)$. Wyznacz punkty $(x,y)$ w których funkcja $f$ jest lokalnie odwracalna.

**Zadanie 6.** Niech $h(x,y,z) = xy^2z$. Wyznacz te punkty $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ w których gradient funkcji $h$ jest równy $(1,1,1)$.

**Zadanie 7.** Wyznacz największą wartość funkcji $f(x,y) = x^2y - xy^2$ na zbiorze $[0,1]^2$.

**Zadanie 8.** Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2$ na zbiorze $[0,1]^2$.

**Zadanie 9.** Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \times [0,1]$. Oblicz

$$\iiint\limits_A (x^2+y^2-z^2)dxdydz .$$

**Zadanie 10.** Niech $\vec{F}(x,y,z) = (x, 2y, z)$. Niech $\gamma(t) = (\sin(t), t, t^2)$ dla $t \in [0, \pi]$. Oblicz
$$\int\limits_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{dl} \ .$$

**Zadanie 11.** Niech $\vec{F}(x,y) = (xy, x+y)$. Niech $T = \{(x,y) : 0 \leq x \wedge 0 \leq y \wedge x+y \leq 1\}$. Oblicz
$$\int\limits_{\partial T} \vec{F} \cdot \vec{dl} \ .$$
Czy $F$ jest polem potencjalnym ?

**Zadanie 12.** Wyznacz ekstrema warunkowe funkcji $f(x,y)$ przy warunku $g(x,y) = 0$ dla następujących funkcji $f(x,y) = x+y^2$, $g(x,y) = e^{x+y} - xy - 1$

**Zadanie 13.** Oblicz całkę $\int_0^1 \int_0^1 |x^2 - y^2| dxdy$.

**Zadanie 14.** Niech $V = \{(x,y,u,v) : x^2+y^2 \leq 1 \wedge u^2+v^2 \leq 4\}$. Oblicz całkę $\iiiint_V (x^2+y^2)(u^2+v^2) dxdydudv$.

**Zadanie 15.** Oblicz objętość zbioru $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2+y^2} \wedge x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

**Zadanie 16.** Niech $D = \{(x,y) : 0 \leq x \wedge 0 \leq y \wedge 2^2 \leq x^2+y^2 \leq 5^2\}$. Oblicz
$$\iint_D (2 \cdot x \cdot y) dxdy \ .$$

**Zadanie 17.** Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie ciągła. Pokaż, że zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0\}$ jest zbiorem otwartym.

**Zadanie 18.** Niech $f(x,y,z) = \rho\sqrt{|z|}$. Niech $\Pi = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq r^2 \wedge -h \leq z \leq 0\}$ (gdzie $h > 0$). Oblicz
$$\int_{\partial \Pi} f d\vec{S} \ .$$

Powodzenia !!!