Rachunek Prawdopodobieństwa dla Fizyków na WPPT Lista zadań

Jacek Cichoń, WPPT, PWr, 2017/18

Zadania oznaczone * są nieco trudniejsze od zadań bez gwiazdki. Zadania oznaczone ** są jeszcze trudniejsze.

1 Terminologia i oznaczenia

- $|A|$ = moc zbioru A
- $P(A)$ = zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A
- kombinatoryczna przestrzeń probabilistyczna na zbiorze skończonym Ω: przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, P(\Omega), \Pr)$ z prawdopodobieństwem określonym wzorem $\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\quad \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $rng(f)$ = obraz funkcji f.
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

2 Przestrzenie probabilistyczne

Zadanie 1 — Rozważamy kombinatoryczną przestrzeń probabilistyczną na zbiorze $\Omega = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$. Oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:

1. $A = \{(x, y) \in \Omega : x = y\}$,
2. $B = \{(x, y) \in \Omega : x < y\}$,
3. $C = \{(x, y) \in \Omega : x + y = n + 1\}$

Zadanie 2 — Pokaż, że jeśli $|A| = n$, to $|P(A)| = 2^n$.

Zadanie 3 — Ustalmy liczby $n, k \in \mathbb{N}$. Niech $[n]^k = \{X \subseteq \{1, \ldots, n\} : |X| = k\}$. Pokaż, że $|[n]^k| = \binom{n}{k}$.

Zadanie 4 — Ze zbioru $\{1, \ldots, 10\}$ wybieramy zgodnie z rozkładem jednostajnym podzbiór 5 elementowy. Eksperyment ten modelujemy następująco: rozważamy kombinatoryczną przestrzeń probabilistyczną na zbiorze $\Omega = \{A \subseteq \{1, \ldots, 10\} : |A| = 5\}$. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia „środkowym elementem jest 5"? Inaczej mówiąc, oblicz prawdopodobieństwa zdarzenia

$$A = \{X \in \Omega : 5 \in X \wedge |X \cap \{1, 2, 3, 4\}| = |\{X \cap \{6, 7, 8, 9, 10\}| = 2\} .$$

Zadanie 5 — Niech $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, S = ciało borelowskich podzbiorów Ω oraz $\Pr(A) = \lambda(A)/\pi$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a na płaszczyźnie. Oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:

1. $A = \{(x, y) \in \Omega : x > 0\}$
2. $B = \{(x, y) \in \Omega : \frac{1}{3} < \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}\}$
3. $C = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$

Zadanie 6 — Niech $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{S}$ = σ-ciało borelowskich podzbiorów $[0, 1]$ oraz

$$\Pr(A) = \int_0^1 2(1-x) \cdot \mathbf{1}_A(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

1. Sprawdź, że funkcja $\Pr$ jest prawdopodobieństwem
2. Oblicz $\Pr([0, \frac{1}{2}])$, $\Pr((0, \frac{1}{2}))$, $\Pr([\frac{1}{2}, 1])$.

Zadanie 7 — Niech $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{S} = P(\Omega)$ oraz $\Pr(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^{n+1}}$ dla $A \subseteq \mathbb{N}$.

1. Sprawdź, że funkcja $\Pr$ jest prawdopodobieństwem.
2. Oblicz $\Pr(\{n \in \mathbb{N} : n \geq 5\})$ oraz $\Pr(\{2n : n \in \mathbb{N}\})$.

Zadanie 8 — Niech $\mathcal{P} = (\Omega, \mathcal{S}, \Pr)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech $A, B, C \in \mathcal{S}$. Pokaż, że

1. $\Pr(A \cup B \cup C) = \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) - (\Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap C) + \Pr(B \cap C)) + \Pr(A \cap B \cap C)$.
2. Uogólnij poprzedni wzór na $\Pr(\bigcup_{i=1}^{n} A_n)$.

Zadanie 9 — Rozważamy kombinatoryczną przestrzeń probabilistyczną na zbiorze $\Omega = \{1, \ldots, 1000\}$. Wyznacz prawdopodobieństwa zdarzeń $A = \{k \in \Omega : 2|k \vee 3|k\}$ oraz $B = \{k \in \Omega : 2|k \vee 3|k \vee 5|k\}$.

* **Zadanie 10 —** . Ustalmy liczbę n. Niech S_n będzie zbiorem wszystkich permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Rozważamy kombinatoryczną przestrzeń probabilistyczną na zbiorze S_n. Wyznacz prawdopodobieństwo zdarzenia $\{\pi \in S_n : (\forall i)(\pi(i) \neq i\}$.

Zadanie 11 — Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $\mathcal{P} = (\Omega, \mathcal{S}, \Pr)$. Niech $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów z σ-ciała $\mathcal{S}$.

1. Pokaż, że $(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_n)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c$ oraz $(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_n)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c$.
2. Pokaż, że $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$.
3. Pokaż, że jeśli $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \ldots$ to $\Pr((\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \to \infty} \Pr(A_n)$.
4. Pokaż, że jeśli $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \ldots$ to $\Pr((\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \to \infty} \Pr(A_n)$.

* **Zadanie 12 —** Niech $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{S}$ = ciało borelowskich podzbiorów $[0, 1]$ oraz $\Pr(A) = \lambda(A)$. Niech $B = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Pokaż, że $\Pr(B) = 0$ oraz $\Pr(B^c) = 1$.

Zadanie 13 — Z przedziału $[0, 1]$ wybieramy losowo zgodnie z rozkładem jednostajnym trzy liczby x, y, z. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ich suma jest większa od 1 ?

Zadanie 14 — Niech $\Omega = \{1, \ldots, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Wyznacz najmniejsze σ-ciało podzbiorów przestrzeni Ω zawierające rodzinę $\{A, B\}$?

Zadanie 15 — Niech $\mathcal{B}$ oznacza rodzinę podzbiorów borelowskich odcinka $[0, 1]$. Niech $\mathcal{S} = \{B \times [0, 1] : B \in \mathcal{B}\}$.

1. Pokaż, że $\mathcal{S}$ jest σ-ciałem podzbiorów przestrzeni $[0, 1] \times [0, 1]$
2. Podaj przykład podzbioru borelowskiego $[0, 1] \times [0, 1]$ który nie należy do $\mathcal{S}$.

Zadanie 16 — Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w wśród losowo wybranych 13 spośród 52 kart znajdują się dokładnie dwa króle i jeden as. Jaki jest prawdopodobieństwo posiadania dokładnie jednego asa jeśli wiadomo, że ma się dokładnie dwa króle?

Zadanie 17 — Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania szóstki w totolotku?

3 Niezależność

Zadanie 18 — Załóżmy, że zdarzenia A, B, C są niezależne. Pokaż, że zdarzenia A^c, B, C są również niezależne. Wynioskuj z tego, że również A^c, B^c, C^c są niezalezne. Uogólnij ten fakt na dowolną rodzinę zdarzeń.

Zadanie 19 — Załóżmy, że p jest liczbą pierwszą. Na przestrzeni $\Omega = \{a, \ldots, n\}$ rozważamy prawdopodobieństwo kombinatoryczne. Pokaż, że jeśli $A, B \subseteq \Omega$ są niezależne, to co najmniej jeden z tych zbiorów jest równy $\emptyset$ lub Ω.

Zadanie 20 — Pokaż, że jeśli A jest niezależne od siebie, to $\Pr(A) = 0$ lub $\Pr(A) = 1$.

Zadanie 21 — (Kostka Kołmogorowa) Rozważamy czworościenną kostkę do gry ze ścianami pomalowanymi kolorami R, G, B oraz $\{R, G, B\}$. Rzucamy tę kostką. Niech R_X ozancza zdarzenie, że kostka upadnie na ścianę zawierającą kolor X. Pokaż, że zdarzenia $\{R_A, R_B, R_G\}$ są parami niezależne ale nie są niezależne.

Zadanie 22 — Rzucamy monetą n razy. Niech A_{ij} oznacza zdarzenie „i-ty oraz j-ty rzut dały takie same wyniki. Pokaż, że zdarzenia $\{A_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ są parami niezależne, ale nie są niezależne.

Zadanie 23 — (Paradoks Bertranda) Dane są 3 pudełka. Jedno zawiera 2 czarne kule, drugie zawiera 2 białe kule, pozostałe zawiera jedą białą, jedną czarną kulę. Wybieramy losowo jedno z pudełek i wybieramy jedną kulę nie patrząc na kolor wybranej kuli. Z jednakowym prawdopodobieństwem wybrana kula jest czarna lub biała. Pozostała kula jest z jednakowym prawdopodobieństwem 1/2 biała lub czarna. Stąd szansa, że w wybranym pudełku są jednakowe kule jest 1/2. To rozumowanie jest błędne, a prawidłowa odpowiedź jest 2/3. Zrób poprawne wyliczenia.

Zadanie 24 — Wśród 100 monet jest jedna moneta o dwóch orłach. Wylosowano jedną monetę i następnie 6 razy ją rzucono i otrzymano za każdym razem orła. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana moneta miała dwa orły?

Zadanie 25 — (Paradoks Monty'ego Halla) Zawodnik stoi przed trzema zasłoniętymi drzwiami. Za jednymi z nich (za którą – wie to tylko prowadzący program) jest samochód. Za dwoma pozostałymi są kozy. Gracz wybiera jedne z trzech drzwi. Prowadzący program odsłania inne drzwi, za którymi stoi koza, po czym proponuje graczowi zmianę wyboru. Jaką decyzję powinien podjąć gracz (jeśli chce wygrać samochód)?

4 Zmienne losowe

Zadanie 26 — Rozważamy kombinatoryczna przestrzeń probabilistyczną na przestrzeni $\Omega = \{0, \ldots, n\}$. Niech $X(i) = i$.

1. Oblicz wartość oczekiwaną $\mathrm{E}[X]$ zmiennej losowej X.
2. Narysuj wykres dystrybuanty F_X zmiennej losowej X.

Zadanie 27 — Rozważamy kombinatorycznę przestrzeń probabilistyczną na przestrzeni $\Omega = \{0, \ldots, n-1\}^2$. Niech $X((i, j)) = i + j$. Oblicz $\mathrm{E}[X]$. Wskazówka: Przedstaw X jako sumę dwóch prostszych zmiennych losowych.

Zadanie 28 — Niech $\mathcal{P}$ będzie przestrzenią probabilistyczną z Zadania 5. Niech $X((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$ dla $(x, y) \in \Omega$.

1. Oblicz wartość oczekiwaną $\mathrm{E}[X]$ zmiennej losowej X.
2. Podaj interpretację probabilistyczną otrzymanego wyniku.
3. Kule o promieniu r w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ma objętość $C_n r^n$ dla pewnych stałych C_n (np. $C_1 = 2$, $C_2 = \pi$, $C_3 = \frac{4}{3}\pi$, $C_4 = \frac{\pi^2}{2}$). Uogólnij wynik z pytania 1 na kule w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 29 — Rozważamy przestrzeń probabilistyczną $([0, 1]^2, \mathcal{B}, \lambda)$, gdzie $\mathcal{B}$ jest σ-ciałem borelowskich podzbiorów $[0, 1]^2$ zaś λ jest miarą Lebesque'a na $\mathcal{B}$. Niech $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ będzą funkcjami borelowskimi. Niech $F(x, y) = f(x)$ oraz $G(x, y) = g(y)$. Pokaż, że zmienne losowe F i G są niezależne.

Zadanie 30 — Niech $n, k \in \mathbb{N}$. Rozważamy kombinatoryczną przestrzeń probabilistyczną $\Omega_{k,n}$ złożoną ze wszystkich funkcji $f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$.

1. Podaj interpretację tej przestrzeni w języku „kul i urn".
2. Ustalmy $i \in \{1, \ldots, n\}$. Niech $E_i = \{f \in \Omega_{k,n} : i \notin rng(f)\}$. Pokaż, że $\Pr[E_i] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$.
3. Niech $R(f) = |rng(f)|$. Wyznacz $\mathrm{E}[R]$.

5 Wariancja

Zadanie 31 — Niech X będzie zmienną losową oraz $a, b \in \mathbb{R}$. Pokaż, że $\mathrm{var}\,[aX+b] = a^2\mathrm{var}\,[X]$.

Zadanie 32 — Wyznacz $\mathrm{E}\left[(X-EX)^3\right]$ za pomocą $\mathrm{E}\,[X]$, $\mathrm{E}\left[X^2\right]$ oraz $\mathrm{E}\left[X^3\right]$.

Zadanie 33 — Załóżmy, że X ma rozkład Bernoulliego z parametrem p (czyli $\Pr[X=1]=p$ oraz $\Pr[X=0]=1-p$). Wyznacz $\mathrm{E}\,[X]$ i $\mathrm{var}\,[X]$.

Zadanie 34 — Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[a, b]$, czyli

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & : x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & : x \in [a,b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

1. Wyznacz gęstość zmiennej losowej X.
2. Wyznacz $\mathrm{E}\,[X]$, $\mathrm{E}\left[X^2\right]$, $\mathrm{E}\left[X^3\right]$ oraz $\mathrm{var}\,[X]$.

Zadanie 35 — Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Sprawdź, że $\mathrm{E}\,[X] = \frac{1}{\lambda}$ oraz $\mathrm{var}\,[X] = \frac{1}{\lambda^2}$.

Zadanie 36 — Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Niech $x, y > 0$. Pokaż, że $\Pr[X > x+y | X > x] = P[X > y]$

Zadanie 37 — Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$ jeśli przyjmuje wartości ze zbioru liczb naturalnych oraz $\Pr[X=k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

1. Sprawdź, że to jest poprawna definicja (czyli, że $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = 1$).
2. Oblicz $\mathrm{E}\,[X]$ oraz $\mathrm{var}\,[X]$.

Zadanie 38 — Wyznacz wariancję rozkładu geometrycznego.

Zadanie 39 — Załóżmy, że $X \geq 0$ oraz $c > 0$. Pokaż, że $\Pr[X \geq c\mathrm{E}\,[X]] \leq \frac{1}{c}$.

Zadanie 40 — Niech R oznacza IQ losowo spotkanej osoby na ulicy. Załóżmy, że wiadomo, że $\mathrm{E}\,[R] = 100$ oraz, że $\mathrm{var}\,[R] = 100$.

1. Zastosuj nierówność Markowa do oszacowania z góry $\Pr[X \geq 200]$.
2. Zastosuj nierówność Czebyszewa do oszacowania z góry $\Pr[X \geq 200]$.

Zadanie 41 — Niech $\mu \in \mathbb{R}$ oraz $\sigma > 0$. Oblicz $\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$.
Wskazówka: $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

C.D.N.

Powodzenia,
Jacek Cichoń