Analiza Matematyczna I
dla Fizyki na WPPT
Lista zadań

Jacek Cichoń, WPPT, PWr, 2018/19

Zadania oznaczone * są nieco trudniejsze od zadań bez gwiazdki. Zadania oznaczone ** są jeszcze trudniejsze.

1 Wstęp

1.1 Logika, zbiory i notacja matematyczna

Zadanie 1 — Niech p, q, r będą **zmiennymi zdaniowymi**. Pokaż, że:

1. $\models (\neg(p \wedge \neg p))$,
2. $\models (p \vee \neg p))$,
3. $\models ((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ (łączość spójników $\vee$)
4. $\models ((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$,
5. $\models ((p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$,
6. $\models (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ (prawo eliminacji implikacji),
7. $\models (\neg(p \rightarrow q)) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$.

Podaj interpretację dwóch pierwszych **tautologii**.

Uwaga: $\models \phi$ oznacza, że ϕ jest tautologią.

Zadanie 2 — Pokaż, że jeśli Jan umie fizykę i Jan nie umie fizyki, to Jan umie biologię.

1. Sformułuj odpowiednią tautologię.
2. Podaj inne przykłady zastosowania tej tautologii.

Zadanie 3 — Niech $\phi \equiv \psi$ oznacza, że $\models (\phi \leftrightarrow \psi)$. Pokaż, że dla dowolnych zdań ϕ, ψ, η mamy

1. $\phi \equiv \phi$ (zwrotność)
2. Jeśli $\phi \equiv \psi$ to $\psi \equiv \phi$ (symetria)
3. Jeśli $\phi \equiv \psi$ oraz $\psi \equiv \eta$ to $\phi \equiv \eta$ (przechodniość).

Zadanie 4 — Pokaż, że spójniki $\rightarrow$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ możesz zdefiniować za pomocą spójników $\vee$ oraz $\neg$. Pokaż również, że spójniki $\rightarrow$, $\vee$, $\leftrightarrow$ możesz zdefiniować za pomocą spójników $\wedge$ oraz $\neg$.

Zadanie 5 — Zapisz, stosując notację matematyczną, następujące **zdania** i **formuły**:

1. p jest liczbą pierwszą,
2. istnieje najmniejsza liczba naturalna,
3. nie istnieje największa liczba naturalna,
4. nie istnieje najmniejsza liczba rzeczywista dodatnia.

Zastosuj znane prawa logiki do uproszczenia tych wyrażeń.

Zadanie 6 — Podaj interpretację następujących zdań

1. $(\forall x \in (0, \infty))(\exists n \in \mathbb{N})(\frac{1}{n} < x)$,
2. $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$,
3. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x < y \vee x = y \vee x > y)$,

4. $(\forall a \in \mathbb{N})(\exists x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N})(a = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$,
5. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(y \leq x)$.

Zadanie 7 — Niech $R(x, y)$ oznacza, że "x jest rodzicem y". Niech $K(x)$ oznacza, że "x jest kobietą". Zdefiniuj, korzystając z notacji matematycznej oraz predykatów R i K, następujące **predykaty**:

1."x jest dziadkiem y",

2."x jest siostrą y",

3."x jest bratem y",

4."x jest ciotką y".

1.2 Zbiory

Zadanie 8 — Niech $A = [0, 2]$ oraz $B = [1, 3)$. Wyznacz zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$.

Zadanie 9 — Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ oraz $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x, y < \frac{3}{2}\}$. Wyznacz zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$.

Zadanie 10 — Odcinkiem nazywamy dowolny podzbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że

$$(\forall a, b, c)\left(((a < b < c) \wedge (a \in A) \wedge (c \in A)) \to b \in A\right) .$$

Spróbuj opisać rodzinę wszystkich odcinków.

Zadanie 11 — Niech $A, B \subseteq \Omega$ oraz niech X^c oznacza dopełnienie zbioru $X \subseteq \Omega$ do przestrzeni Ω. Udowodnij prawa de Morgana dla zbiorów A i B, czyli pokaż, że

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Pokaż również, że

3. $(A^c)^c = A$

Zadanie 12 — Wymień wszystkie poznane do tej pory warianty praw de Morgana.

Zadanie 13 — Niech A i B będą zbiorami. Pokaż, że następujące zdania są równoważne:

1. $A \subseteq B$
2. $A \cup B = B$
3. $A \cap B = A$.

* **Zadanie 14 —** Mamy ustalone dwa zbiory $A, B \subseteq \Omega$. Ile zbiorów możesz zdefiniować z tych zbiorów za pomocą operacji $\cup$, $\cap$,$\setminus$ oraz ^{c} (dopelnienie do zbioru Ω). Uogólnij to zadanie na trzy zbiory.

1.3 Podstawowe zbiory liczbowe

Zadanie 15 — Uprość następujące wyrażenia:

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$, $\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{5}}$, $\frac{1}{1+\sqrt{5}}$
2. $(2^4)^2$, $2^{(4^2)}$

Zadanie 16 — Niech $a, b, c > 0$ i $a \neq 1$. Udowodnij następujące własności funkcji logarytmicznych:

1. $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$
2. $\log_a(b^k) = k \log_a(b)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{R}$
3. $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ dla $b \neq 1$.

Zadanie 17 — Uprość następujące wyrażenia:

1. $\log_{10}(10^2 \cdot 5^4)$, $\quad 4^{\log_2(5)}$, $\quad \log_3(27\sqrt{3})$

2. $2^{2\log_4 +3\log_8 3}$, $\quad 9^{\log_3 5}$

Zadanie 18 — Przypomnij sobie dowód tego, że $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Pokaż, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to $\sqrt{p}$ jest liczbą niewymierną.

* **Zadanie 19 —** Pokaż, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ jest taką liczbą naturalną, że $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ to istnieje liczba naturalna k taka, że $n = k^2$.

Zadanie 20 — Pokaż, że jeśli $q \in \mathbb{Q}$, to $\sqrt{2} + q \notin \mathbb{Q}$. Dla jakich liczb wymiernych $q \in \mathbb{Q}$ mamy $q\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$?

Zadanie 21 — Niech $a = 3.1415926535897932385\ldots$. Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy liczby

$$a_n = \frac{\lfloor a \cdot 10^n \rfloor}{10^n}.$$

Wyznacz pierwsze 10 wyrazów tego ciągu, tzn. oblicz liczby $a_0, a_1, \ldots, a_9$.
Uwaga: $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x..

Zadanie 22 — Pokaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x oraz y mamy

1. $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
2. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
3. $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
4. Z jakich własności liczb rzeczywistych korzystałaś/korzystałeś podczas dowodzenia tych wzorów?

Zadanie 23 — Dla jakich par liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość $(x + y)^2 = x^2 + y^2$?

Zadanie 24 — Pokaż metodą indukcji matematycznej, że

1. $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$. **Uwaga:** Musisz również znać proste wyprowadzenie tego wzoru..
2. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$
3. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
4. $(\forall n \in \mathbb{N})(n < 2^n)$
5. $(\forall n \geq 4)(n^2 < 2^n)$
6. $(\forall n \geq 4)(2^n < n!)$
7. $(\forall n \geq 1)(6|(n^3 - n)$

Zadanie 25 — Pokaż, korzystając z poprzedniego zadania, że $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Podaj interpretację geometryczną tego faktu.

Zadanie 26 — Załóżmy, że $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ jest nieskończonym ciągiem liczb naturalnych. Pokaż, że $(\forall k \in \mathbb{N})(k \leq n_k)$.

Zadanie 27 — Wyznacz samodzielnie sześć pierwszych wierszy trójkąta Pascala. Wypisz wzory na $(x + y)^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

Zadanie 28 — Pokaż, że jeśli $0 < k \leq n$, to $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$. Jak można tę obserwację wykorzystać do wyznaczania wartości $\binom{n}{k}$?

* **Zadanie 29 —** Symbolem $|X|$ oznaczamy liczbę elementów skończonego zbioru X. Niech X będzie n - elementowym zbiorem. Dla $k \leq n$ określamy

$$[X]^k = \{Y \subseteq X : |Y| = k\}.$$

1. Pokaż, że $|[X]^k| = \binom{n}{k}$.
2. Korzystając z poprzedniego wyniku podaj kombinatoryczne wyprowadzenie tożsamości Pascala $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

3. Symbolem $P(X)$ oznaczamy zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X. Pokaż, że jeśli $|X| = n$ to $|P(X)| = 2^n$.

Zadanie 30 — Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

pokaż, że

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ i podaj interpretację kombinatoryczna tego faktu
2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$.

Zadanie 31 — Narysuj wykres wartości $\binom{20}{k}$ dla $k = 0, \ldots, 20$. Która z tych liczb jest największa? Uogólnij to spostrzeżenie dla ciągu liczb $(\binom{n}{k})_{k=1,\ldots,n}$ dla dowolnego n. Wskazówka: Możesz, np., skorzystać z funkcji KOMBINACJE programu Excel.

Zadanie 32 — Pokaż, że $\binom{a+b}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{a}{l} \binom{b}{k-l}$.

1.4 Liczby rzeczywiste

Zadanie 33 — Za pomocą wyszukiwarki Google narysuj wykresy różnych funkcji kwadratowych (np. wprowadź w pasku zapytań wyrażenie $x \wedge 2 - 5x + 1$). Zapoznaj się z linkami umieszczonymi na stronie `http://ki.pwr.edu.pl/StudenciOnLineTools.php`. Spróbuj narysować wykresy funkcji kwadratowych za pomocą serwisu Wolfram Alpha.

Zadanie 34 — Wyznacz następujące zbiory:

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 > 0\}$,
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$,
3. $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$,
4. $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 > 0\}$.

* **Zadanie 35 —** Sformułuj samodzielnie pojęcie kresu dolnego podzbioru A zbioru liczb rzeczywistych - oznaczmy go przez $\inf(A)$. Pokaż, że $\inf(A) = -\sup(-A)$, gdzie $-A = \{-a : a \in A\}$. Wywnioskuj z tego, że każdy ograniczony z dołu podzbiór $\mathbb{R}$ ma kres dolny.

Zadanie 36 — Wyznacz kresy dolne i górne następujących zbiorów:

1. $\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$
2. $(0,1) \cup (3,4]$
3. $(0,1] \cap \mathbb{Q}$
4. $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$
5. $\mathbb{N}$
6. $\mathbb{Z}$

* **Zadanie 37 —** Niech $A = \{x \geq 0 : x^2 < 2\}$. Pokaż, że $\sup(A)^2 = 2$ (czyli, że $\sup(A) = \sqrt{2}$).

Zadanie 38 — Korzystając z tego, że $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ pokaż, że $|\sin(x) + 2\cos(x)| \leq \sqrt{5}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wskazówka: Skorzystaj z nierówności Cauchy'ego.

Zadanie 39 — Pokaż, że dla dowolnego ciągu liczb $a_1, \ldots a_n$ zachodzi nierówność

$$a_1 + \ldots + a_n \leq \sqrt{n}\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\ .$$

1.5 Przestrzenie metryczne - I

Zadanie 40 — Sprawdź, że funkcja $d(x,y) = |x - y|$ jest metryką na $\mathbb{R}$.

Zadanie 41 — Niech X będzie dowolnym zbiorem niepustym. Dla $(x, y) \in X \times X$ definiujemy

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & : x \neq y \\ 0 & : x = y \end{cases}$$

Pokaż, że para uporządkowana (X, d) jest przestrzenią metryczną.
Uwaga: Metrykę tę nazywamy metryką dyskretną na zbiorze X.

Zadanie 42 — Na zbiorze $\mathbb{R}^2$ określamy funkcję

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Pokaż, że d_1 jest metryką na $\mathbb{R}^2$.
Uwaga: Metrykę tę nazywamy metryką l_1 na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 43 — Na zbiorze $\mathbb{R}^2$ określamy funkcję

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

Pokaż, że d_∞ jest metryką na $\mathbb{R}^2$.
Uwaga: Metrykę tę nazywamy metryką l_∞ na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 44 — Rozważamy przestrzeń $\mathbb{R}^2$. Narysuj kule $K((0, 0), 1)$ w metrykach euklidesowej, l_1 oraz l_∞.

Zadanie 45 — Rozważamy przestrzeń liczb zespolonych $\mathbb{C}$. Narysuj kule $K(0, 1)$ w standardowej metryce ne zbiorze $\mathbb{C}$ (czyli w metryce $d(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\|$).

Zadanie 46 — Jak wyglądają kule w metryce dyskretnej?

2 Granice ciągów

Zadanie 47 — Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Niech $g_1, g_2 \in X$ oraz niech $(a_n)_{n \geq 0}$ będzie ciągiem elementów X. Pokaż, że jeśli $\lim_n a_n = g_1$ oraz $\lim_n a_n = g_2$ to $g_1 = g_2$.
Uwaga: Interpretacja tego zadania: granica ciągu jest wyznaczona jednoznacznie.

Zadanie 48 — Pokaż, że ciąg $(\sqrt[n]{n})_{n \geq 1}$ jest ograniczony.
Wskazówka: Skorzystaj z Zadania 24.4.

Zadanie 49 — Oblicz granice następujących ciągów:

1. $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$,
2. $b_n = \frac{2^n+1}{2^n+3}$,
3. $c_n = \frac{2n^2+n+3}{n^2+3n+1}$,
4. $d_n = \frac{3n^2+n+5}{n^2+n+1}$,
5. $e_n = \frac{n^3+n+3}{n^2+3n+3}$,
6. $f_n = \frac{-n^3+2n+2}{n^2+2n+1}$,
7. $g_n = \frac{2n^2+n+3}{n^5+3n+2}$,
8. $h_n = \frac{n^2+n+3}{n^3+n^2+1}$.

Zadanie 50 — Dlaczego ciąg $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ nie jest zbieżny?

Zadanie 51 — Dlaczego ciąg $a_n = (-2)^n$ nie jest zbieżny?

Zadanie 52 — Bezpośrednio z definicji granicy ciągu pokaż, że

1. $\lim_n \frac{n+2}{n} = 1$,
2. $\lim_n \frac{2n+1}{n^2} = 0$,

3. $\lim_n (n - \sqrt{n}) = \infty$.

Zadanie 53 — Oblicz granice
1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$,
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

Zadanie 54 — Oblicz granice ciągów
1. $a_n = \frac{n+(-1)^n}{2n+1}$,
2. $b_n = \sqrt[n]{n^n+1}$,
3. $c_n = \sqrt[n]{n2^n+n}$.

Zadanie 55 — Pokaż, że ze zbieżności ciągu (a_n) wynika zbieżność ciągu $(|a_n|)$. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?

Zadanie 56 — Ustalmy liczbę $a \in \mathbb{R}$. Wyznacz granicę ciągu $a_n = \frac{\lfloor na \rfloor}{n}$.
1. Wywnioskuj z tego, że każda liczba rzeczywista jest granicą ciągu liczb wymiernych.
2. Pokaż, że każda liczba rzeczywista jest granicą ciągu liczb niewymiernych.

Zadanie 57 — Pokaż, że jeśli $|a| < 1$ to

$$\lim_{n\to\infty}(1+a+\ldots+a^n) = \frac{1}{1-a}\ .$$

Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru na $1+q+q^2+\ldots+q^n$.

Zadanie 58 — Niech $a_0 = 1$ oraz $a_{n+1} = 3 + \frac{a_n}{2}$.
1. Pokaż, stosując metodę indukcji matematycznej, że $a_a < 6$ dla każdego n.
2. Pokaż, że ciąg (a_n) jest rosnący
3. Wyznacz granicę tego ciągu.

Zadanie 59 — Ustalmy liczbę $a > 0$. Niech $x_0 = a$ oraz $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$. Pokaż, że $\lim_n x_n = \sqrt{a}$. Zastosuj ten wyniki dla $a = 2$. Który wyraz tak zbudowanego ciągu rożni się od $\sqrt{2}$ o mniej niż 10^{-3}?

Zadanie 60 — Niech $a_0 = 1$ oraz $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$. Pokaż, że ciąg (a_n) jest rosnący i ograniczony oraz znajdź jego granicę.

Zadanie 61 — Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - n)$. Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$..

Zadanie 62 — Oblicz granicę następujących ciągów
1. $a_n = (1+\frac{1}{n})^{3n+1}$,
2. $b_n = (1-\frac{1}{n})^{2n+1}$,
3. $c_n = (1+\frac{1}{n})^{n^2}$,
4. $d_n = (\frac{n-1}{n+1})^{n+1}$,
5. $e_n = (1+\frac{1}{n^2})^n$.

Zadanie 63 — Oblicz następujące granice: $\lim_n \sqrt[n]{5^n+1}$, $\lim_n \sqrt[n]{n3^n+2}$.

Zadanie 64 — Załóżmy, że $0 \le a \le b$. Wyznacz granicę ciągu $\sqrt[n]{a^n+b^n}$.

Zadanie 65 — Załóżmy, że $\lim_n a_n = 0$. Pokaż, że wtedy $\lim_n |a_n| = 0$.

Zadanie 66 — Oblicz granicę $\lim_n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.
Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru $a - b = (a^2 - b^2)/(a+b)$.

Zadanie 67 — Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wyznacz granice następujących ciągów:

1. $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+n} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}$
2. $b_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$
3. $c_n = \sqrt[n]{\frac{3^n+4^n}{4^n+5^n}}$.

Zadanie 68 — Niech $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Pokaż, że $\lim_n H_n = \infty$.
Wskazówka: Zauważ najpierw, że ciąg (H_n) jest rosnący. Przyjrzyj się następnie takiemu pogrupowaniu: $H_8 = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8})$. Zapisz w podobny sposób H_{16}. Spróbuj oszacować od dołu każdy z pogrupowanych składników .
Uwaga: Liczby H_n nazywamy liczbami harmonicznymi.

Zadanie 69 — Oblicz następujące granice (rozważamy metryki euklidesowe)

1. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}, (1 + \frac{1}{n})^n\right)$
2. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{2^n + 5^n}, (1 + \frac{1}{n})^n, \frac{n^2+1}{n^3+1}\right)$.

Zadanie 70 — Niech $(a_n)_n$ będzie ciągiem liczb zespolonych oraz $g \in \mathbb{C}$. Pokaż, że następujące zdania są równoważne:

1.$\lim_{n\to\infty} a_n = g$

2.$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) = \mathrm{Re}(g)$ i $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n) = \mathrm{Im}(g)$

Zadanie 71 — Rozważamy metryką dyskretną. Jakie ciągi są ciągami zbieżnymi w tej metryce? Jakie ciągi są ciągami podstawowymi w tej metryce? Czy przestrzeń ta jest zupełna?

2.1 Zbiory domknięte i otwarte

Zadanie 72 — Ustalmy dodatnią liczbę naturalną C. Niech $a_n = (n \mod C) + \frac{1}{n}$. Wyznacz punkty skupienia ciągu (a_n).

Zadanie 73 — Podaj przykład ciągu, który ma nieskończenie wiele punktów skupienia.

* **Zadanie 74 —** Podaj przykład ciągu, którego zbiorem punktów skupienia jest odcinek $[0, 1]$.

** **Zadanie 75 —** Czy istnieje ciąg, którego zbiorem punktów skupienia jest zbiór $[0, 1)$?

Zadanie 76 — Korzystając z Zadania 56 pokaż, że

1. $cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$
2. $cl(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

Zadanie 77 — Wyznacz domknięcia, wnętrza oraz brzegi następujących zbiorów:

1. w przestrzeni $(\mathbb{R}, d_e)$: $\emptyset$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$
2. w przestrzeni $(\mathbb{R}, d_e)$: $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $[0, 1) \setminus \mathbb{Q}$.
3. w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_e)$: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
4. w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_e)$: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
5. w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_e)$: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \wedge |y| \leq 1\}$

Zadanie 78 — Pokaż, że dla dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d) oraz dowolnego $A \subseteq X$ mamy $int(A) \subseteq A \subseteq cl(A)$, $cl(cl(A)) = cl(A)$ oraz $int(int(A)) = int(A)$.

Zadanie 79 — Niech $A = [0, 1] \cup [2, 3) \cup (3, 4] \cup (5, 6) \cup ([7, 8] \cap \mathbb{Q})$. Oblicz $cl(A)$, $int(A)$, $cl(int(A))$, $int(cl(A))$, $int(cl(int(A)))$, $cl(int(cl(A)))$.

Zadanie 80 — Niech (X, d) będzie przestrzenią dyskretną. Pokaż, że dla dowolnego $A \subseteq X$ mamy $cl(A) = A$ oraz $int(A) = A$.

* **Zadanie 81 —** Niech (X, d) będzie dowolna przestrzenią metryczną. Pokaż, że dla dowolnego $A \subseteq X$ mamy

1.$cl(A) = X \setminus int(X \setminus A)$

2.$int(A) = X \setminus cl(X \setminus A)$

3 Granice funkcji i ciągłość

UWAGA: Od tego miejsca lista zadań ulegnie zmianie.

Zadanie 82 — Wyznacz wartości funkcji sin, cos, tan i cot dla kątów $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

Zadanie 83 — Pokaż, że $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$, $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ oraz $\tan(x + \frac{\pi}{2}) = -\cot(x)$.

Zadanie 84 — Korzystając ze wzorów $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)$ oraz $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$ wyprowadź wzory na $\sin(2x)$, $\sin(3x)$, $\cos(2x)$, $\cos(3x)$.

Zadanie 85 — Narysuj, korzystając z przeglądarki Google, wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$ oraz $g(x) = \cos(x)^2$. Wyjaśnij zaobserwowane zjawisko.

Zadanie 86 — Naszkicuj wykresy funkcji $f_k(x) = \sqrt{1 - x^2} \cdot \sin(k \cdot x)$ dla $k = 1, 10, 100, 200$.

Zadanie 87 — Naszkicuj na wspólnym wykresie wykresy funkcji $f(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2} - 1$ oraz $g(x) = |x| - \sqrt{1 - x^2} - 1$.

Zadanie 88 — Naszkicuj na wspólnym wykresie wykresy funkcji $f(x) = (|x| + \sqrt{1 - x^2} - 1)\cos^2(200x)$ oraz $g(x) = (|x| - \sqrt{1 - x^2} - 1)\cos^2(200x)$.

Zadanie 89 — Niech $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$.

1. Wyznacz następujące granice: $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 2+} f(x)$, $\lim_{x\to 2-} f(x)$, $\lim_{x\to -2+} f(x)$, $\lim_{x\to -2-} f(x)$.
2. Naszkicuj wykres tej funkcji.

Zadanie 90 — Niech

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & : & x < 0 \\ 0 & : & x = 0 \\ 1 & : & x > 0 \end{cases}$$

1. Pokaż, że funkcja sgn nie jest ciągła w punkcie 0.
2. Wyznacz punkty ciągłości funkcji sgn.

Zadanie 91 — Wyznacz punkty ciągłości następujących funkcji

1. $f_1(x) = \mathrm{sgn}(\sin(x))$,
2. $f_2(x) = \mathrm{sgn}(\cos(x))$,
3. $f_3(x) = \lfloor x \rfloor$
4. $f_4(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

Zadanie 92 — Niech $f : (-1, 0) \cup (0, 1) \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & : x \in (-1, 0) \\ x - 1 & : x \in (0, 1) \end{cases}$$

1. Pokaż, że f jest ciągła oraz różnowartościowa.
2. Wyznacz obraz f
3. Wyznacz funkkcję f^{-1}.
4. Czy funkcja f^{-1} jest ciągła?

Zadanie 93 — Niech

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Pokaż, że funkcja f nie jest ciągła w żadnym punkcie.
Wskazówka: Skorzystaj z zadania 76.

Zadanie 94 — Korzystając z definicji Cauchy'ego ciągłości funkcji pokaż, że suma dwóch funkcji ciągłych w punkcie x_0 jest ciągła punkcie x_0

Zadanie 95 — Korzystając z definicji Cauchy'ego ciągłości funkcji pokaż, że funkcja $f(x) = x^3$ jest ciągła.

Zadanie 96 — Załóżmy, że istnieje $\eta > 0$ taka, że $(\forall x)(|x - x_0| < \eta \rightarrow f(x) = g(x))$. Pokaż, że jeśli f jest ciągła w punkcie x_0 to również g jest ciągła w punkcie x_0. Dlaczego pokazaną własność funkcji ciągłych możemy wysłowić następująco: *ciągłość funkcji w punkcie jest pojęciem lokalnym*?

Zadanie 97 — Narysuj wykresy funkcji zadanych wzorami $y = \frac{x}{x-1}$, $y = x - \lfloor x \rfloor$, $y = x \sin(\frac{1}{x})$, $y = x^2 \sin(\frac{1}{x})$, $y = \frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x})$ oraz wyznacz ich granice w punkcie 0.

Zadanie 98 — Naszkicuj wykresy funkcji zadanych wzorami:

1. $y = \frac{1}{x^2-1}$,
2. $y = \frac{x}{x^2-1}$,
3. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$,
4. $y = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Zadanie 99 — Niech $n > 0$. Naszkicuj wykres funkcji zadanej wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)\cdots(x-n)} .$$

Wskazówka: rozważ oddzielnie przypadek n parzystego i n nieparzystego.

* **Zadanie 100 —** Pokaż, że dla każdego naturalnego $n \geq 1$ mamy

$$\frac{1}{x(x-1)\cdots(x-n)} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{x-k}$$

Zadanie 101 — Oblicz następujące granice:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{x}$,
2. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$,
3. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$.

Zadanie 102 — Załóżmy, że funkcja f jest ciągła. Pokaż, że funkcja $g(x) = |f(x)|$ jest również ciągła. Wskazówka: skorzystaj z tego, że złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Zadanie 103 — Oblicz granice wielomianu postaci $w(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ w nieskończoności oraz w minus nieskończoności. Wskazówka: Rozważ oddzielnie przypadek n parzystego oraz n nieparzystego.

Zadanie 104 — Pokaż, że każdy wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek.
Wskazówka: Skorzystaj z poprzedniego zadania oraz własności Darboux funkcji ciągłych.

Zadanie 105 — Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe. Niech $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Pokaż, że h jest funkcją ciągłą.

Zadanie 106 — Załóżmy, że $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ jest funkcją ciągłą. Pokaż, że istnieje takie $x \in [0,1]$, że $f(x) = x$.
Wskazówka: Przyjrzyj się funkcji $g(x) = f(x) - x$.
Uwaga: Jest to prosty przykład twierdzenia o punkcie stałym.

Zadanie 107 — Niech $f, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami rosnącymi. Pokaż, że złożenie $f \circ g$ jest funkcją rosnącą.

Zadanie 108 — Naszkicuj wykresy funkcji $f_1(x) = (\frac{1}{2})^x$, $f_2(x) = 1^x$, $f_3(x) = 2^x$, $f_4(x) = e^x$ oraz $f_5(x) = 3^x$.

Zadanie 109 — Naszkicuj wykresy funkcji $f_1(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$, $f_3(x) = \log_2(x)$, $f_4(x) = \log_e(x)$ oraz $f_5(x) = \log_3(x)$.

Zadanie 110 — Pokaż, że każda funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest sumą funkcji **parzystej** i nieparzystej.
Wskazówka: Rozważ funkcje $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ oraz $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

Zadanie 111 — Niech $f(x) = \sin(x)$ oraz $g(x) = x^2$.

1. Naszkicuj wykres funkcji $f \circ g$.
2. Naszkicuj wykres funkcji $g \circ f$.

Zadanie 112 — Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

1. Sprawdź, że $x^2 + 1 = (x-1)(x+1) + 2$. Korzystając z tego wzoru przedstaw funkcję f jako sumę funkcji liniowej oraz pewnej prostej funkcji wymiernej.
2. Korzystając z poprzedniego punktu naszkicuj ponownie wykres funkcji f.
3. Zapoznaj się z pojęciem **asymptoty ukośnej**.

Zadanie 113 — Podaj przykład ciągłej funkcji $f : [0, \infty) \to [0, 1]$ która nie osiąga wartości maksymalnej.

Zadanie 114 — Pokaż przykład takiej funkcji ciągłej $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ która nie jest ograniczona z góry ani z dołu.

Zadanie 115 — Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz niech $a \in \mathbb{R}$.

1. Pokaż, że zbiór $f^{-1}([a, \infty)) = \{x : f(x) \geq a\}$ jest zbiorem domkniętym.
2. Pokaż, że zbiór $f^{-1}(\{a\}) = \{x : f(x) = a\}$ jest zbiorem domkniętym.
3. Pokaż, że zbiór $f^{-1}((a, \infty)) = \{x : f(x) > a\}$ jest zbiorem otwartym.

* **Zadanie 116 —** Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, oraz, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Pokaż, że istnieje $x_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$.

** **Zadanie 117 —** Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(f(x + y) = f(x) + f(y)) .$$

Pokaż, że $f(x) = a \cdot x$ dla $a = f(1)$. Wskazówka: Zacznij od pokazania, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $f(n) = a \cdot n$. Pokaż następnie, że $f(-x) = -f(x)$. Potem się zajmij liczbami wymiernymi. A na końcu skorzystaj z ciągłości.

Zadanie 118 — Niech (X, d_X) oraz (Y, d_Y) będą przestrzeniami dyskretnymi. Pokaż, że dowolna funkcja $f : X \to Y$ jest ciągłym odwzorowaniem z X do Y.

4 Pochodne

Zadanie 119 — Oblicz pochodne następujących funkcji:

1. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, $g(x) = 2x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 1$
2. $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $h(x) = \frac{x^2}{x^3-x+1}$
4. $f(x) = (x^2 + 2x + 1)(x^3 + 2x^2 + 1)$
5. $f(x) = (x + 1)/(x - 1)$, $g(x) = \frac{x^2+x+1}{x^3-1}$
6. $f(x) = xe^x$, $g(x) = x^2e^x$, $h(x) = x^3e^x$. Wskazówka: $(e^x)' = e^x$.

Zadanie 120 — W jakich punktach funkcja $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$ jest różniczkowalna?

Zadanie 121 — Znajdź przykład ciągłej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie różniczkowalna w nieskończonej liczbie punktów.

Zadanie 122 — W jakich przedziałach funkcje $y = x(1-x)^2$, $y = xe^{-x}$, $y = x^2e^{-x}$ są rosnące?

Zadanie 123 — Zbadaj wykresy funkcji $y = x^2e^x$, $y = \frac{x}{1+x^2}$, $y = \frac{2x^2}{(x-1)(x-2)}$.

Zadanie 124 — Niech $\sigma(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ oraz $\zeta(x) = \ln(1+e^x)$.

1. Zbadaj przebieg zmienności funkcji σ i $zeta$.
2. Pokaż, że $\sigma'(x) = \sigma(x)(1-\sigma(x))$.
3. Pokaż, że $\zeta'(x) = \sigma(x)$.
4. Pokaż, że $\ln \sigma(x) = -\zeta(-x)$.

Zadanie 125 — Znajdź ekstrema funkcji $y = x(a-x)$, $y = x(a-x)^2$.

Zadanie 126 — Pokaż, że jeśli funkcje f, g i h są różniczkowalne w punkcie x, to

$$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)\ .$$

Zadanie 127 — Niech

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} ax+b & : x < -1 \\ x^2 & : x \geq -1 \end{cases}$$

Znajdź takie parametry a i b aby funkcja $f_{a,b}$ była różniczkowalna w każdym punkcie.

Zadanie 128 — Oblicz pochodne następujących funkcji:

1. $y = \sqrt[3]{x^3+1}$,
2. $y = \sin(x^2)$,
3. $y = e^{x^2}$,
4. $y = \left(e^{x^2}+1\right)^2$,
5. $y = 2^{\sin(x)}$,
6. $y = \tan^2(x)$,
7. $y = \ln(x^2+1)$, $y = \log\tan(x))$
8. $y = \ln\frac{1}{1+x^2}$,
9. $y = \arcsin(e^x)$, $y = \arccos(x^2)$
10. $y = \arctan(x^2+1)$, $y = \arctan(e^x)$
11. $\sin(\sin(x))$, $\sin(\sin(\sin(x)))$
12. $\sin(\cos(\sin(x)))$

Zadanie 129 — Oblicz pierwsze i drugie pochodne funkcji $f(t) = r\sin(\omega t)$ i $g(t) = r\cos(\omega t)$.

Zadanie 130 — Zbadaj przebieg zmienności następujących funkcji:

1. $f(x) = x^3e^{-x}$.
2. $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$
3. $f(x) = x^2\ln(x)$
4. $f(x) = 2\ln\left(x^2+1\right) + x$
5. $y = \frac{e^x}{x}$,
6. $y = \frac{x}{1+x^2}$,
7. $y = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$.

Zadanie 131 — Dlaczego funkcja $y = \ln x$ $(x > 0)$ jest ciągła? Podaj możliwie prosty argument.

Zadanie 132 — Napisz równania stycznych i prostopadłych do podanych funkcji w podanych punktach:

1. $f(x) = \ln(x + e^x)$, $P = (0, f(0)$,
2. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $P = (1, f(1))$.

* **Zadanie 133 —** Rozważmy następującą funkcję

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{t}) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

1. Pokaż, że funkcja f jest ciągła.
2. Pokaż, że dla każdego $n \geq 0$ istnieje taki wielomian $w(x)$, że $f^{(n)}(t) = w(\frac{1}{t}) \exp(-\frac{1}{t})$.
3. Pokaż, że dla każdego $n > 0$ mamy $\lim_{t \to 0+} \frac{\exp(-\frac{1}{t})}{t^a} = 0$
4. Pokaż, że dla każdego $n \geq 0$ istnieje pochodna $f^{(n)}(0)$ i jest równa 0
5. Zastosuj wzór Taylora dla funkcji f w punkcie 0.

Zadanie 134 — Pokaż, że
1. $\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $\arctan x = \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2}$

Wskazówka: Oblicz pochodne obu stron.

Zadanie 135 — (Wzór Leibnitza) Załóżmy, że f i g są funkcjami n krotnie różniczkowalnymi. Pokaż, że

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

4.1 Zastosowania

Zadanie 136 — Który z punktów paraboli $y = x^2$ leży najbliżej prostej $x - y - 5 = 0$?
Wskazówka: Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $ax + by + c = 0$ wyraża się wzorem

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

.

Zadanie 137 — Znajdź pole największego prostokąta o bokach równoległych do osi układu współrzędnych wpisanego w elipsę o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Zadanie 138 — Pokaż, że ze wszystkich prostokątów o ustalonym obwodzie kwadrat ma największą powierzchnię.

Zadanie 139 — Pokaż, że ze wszystkich trójkątów o ustalonym obwodzie i o ustalonej podstawie trójkąt równoramienny ma największą powierzchnię.

Zadanie 140 — Pokaż, że ze wszystkich trójkątów o ustalonym obwodzie trójkąt równoboczny ma największą powierzchnię.

Zadanie 141 — Załóżmy, że $f'(t) = f(t)$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Pokaż, że istnieje taka stała C, że $f(t) = C \cdot e^t$.
Wskazówka: Oblicz pochodną funkcji $g(t) = \frac{f(t)}{e^t}$. **Uwaga:** Rozwiązaliśmy w ten sposób równanie różniczkowe $x'(t) = x(t)$.

Zadanie 142 — Pokaż, że dla każdego $x > 0$ mamy $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + x) < x$.

4.2 Reguła de l'Hospitala

Zadanie 143 — Korzystając z reguł de l'Hospitala oblicz następujące granice:
1. $\lim_{x \to 0} \frac{xe^{2x} - x}{1 - \cos(3x)}$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^3}{n}$
4. $\lim_{x\to 0}(\ln(1-\cos(x)) - \ln(x^2))$
5. $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x})^{2x}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x^2}}{x}$
7. $\lim_{x\to\infty}(e^x+1)^{\frac{1}{x}}$
8. $\lim_{x\to 0+} x^3 \ln x$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x}$
10. $\lim_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$
11. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$
12. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{x}$,
13. $\lim_{x\to 0+} x\ln(x)$,
14. $\lim_{x\to 0+} x^x$. Wskazówka: skorzystaj z tego, że $t = e^{\ln t}$ dla dowolnego $t > 0$, oraz, że funkcja $f(x) = e^x$ jest ciągła.
15. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

Zadanie 144 — Wyznacz, dla dowolnego ustalonego naturalnego k, granice $\lim_n \frac{(\ln(n))^k}{n}$, $\lim_n \frac{2^n}{n^k}$.

4.3 Wzór Taylora

Zadanie 145 — Niech $f(x) = 1 + x + x^2$. Zastosuj wzór Taylora rzędu 3 dla funkcji f w punktach $x = 0$ oraz $x = 1$.

Zadanie 146 — Wyznacz wielomiany Taylora rzędu 10 następujących funkcji $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin(x)$, $h(x) = \cos(x)$, $j(x) = \sin(x) + \cos(x)$. Za pomocą dowolnego pakietu narysuj na jednym wykresie przybliżenia

Zadanie 147 — Za pomocą wzoru Taylora oblicz $\sin(0.1)$ z dokładnością do 10^{-10}.

5 Całki

Zadanie 148 — Oblicz następujące całki: $\int\limits_0^1 (x^3+x^2+x)\,dx$, $\int\limits_0^1 (x+\sqrt{x})\,dx$, $\int\limits_0^\pi (2\sin(x)+\sin(x))\,dx$.

Zadanie 149 — Wyznacz, bez wykonywania żadnych obliczeń, następujące całki: $\int\limits_{-1}^1 x^3\ dx$, $\int\limits_{-1}^1 (x+x^5)dx$, $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x)\ dx$g

Zadanie 150 — Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Pokaż, że

$$|\int\limits_a^b f(x)g(x)dx| \le \sqrt{\int\limits_a^b f(x)dx}\sqrt{\int\limits_a^b f(x)dx}\ .$$

Wskazówka: Rozważ funkcję $\phi(t) = \int_a^b (f(x) - tg(x))^2 dx$.

Zadanie 151 — Niech $G(c) = \int\limits_1^c \frac{1}{x^2}dx$.

1. Zakładając, że $c > 1$ wyznacz $G(c)$
2. Oblicz $\lim_{n\to\infty} G(c)$

3. Podaj interpretację geometryczną otrzymanego wyniku.

Zadanie 152 — Wyznacz, stosując metodę całkowania przez części, następujące całki nieoznaczone:

1. $\int x\cos(x)\,dx$, $\int x^2\cos(x)\,dx$, $\int x^3\cos(x)\,dx$
2. $\int x\sin(x)\,dx$, $\int x^2\sin(x)\,dx$, $\int x^3\sin(x)\,dx$
3. $\int xe^x\,dx$, $\int x^2e^x\,dx$, $\int x^3e^x\,dx$
4. $\int x\ln x\,dx$, $\int x^2\ln x\,dx$, $\int x^3\ln x\,dx$

Spróbuj samodzielnie uogólnić powyższe obliczenia.

Zadanie 153 — Wyznacz, stosując metodę całkowania przez podstawienie, następujące całki nieoznaczone:

1. $\int \sin(3x+1)\,dx$, $\int \frac{x}{x+1}\,dx$, $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$ (podstaw $t = 1 + x^2$),
2. $\int \frac{1}{1+2x^2}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\,dx$,
3. $\int xe^{-x^2}\,dx$
4. $\int \sin(\ln x)\,dx$ (podstaw $u = \ln x$, zastosuj dwukrotnie całkowanie przez części)
5. $\int \tan x\,dx$

Zadanie 154 — Wyznacz pole następujących obszarów:

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi \wedge |y| \leq \sin x\}$,
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \wedge |y| < e^{-x}\}$.
4. Obszar ograniczony parabolą o równaniu $y = 2x^2 - 6x$ i osią OX

Zadanie 155 — Wyznacz pole elipsy zadanej równaniem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Zadanie 156 — Załóżmy, że f jest funkcją różniczkowalna oraz, że g jest funkcją ciągłą. Niech

$$H(x) = \int_a^{f(x)} g(t)\,dt\,.$$

Wyznacz $H'(x)$.
Wskazówka: Niech $F(x) = \int_a^x g(t)\,dt$. Zauważ, że $H(x) = F(f(x))$.

Zadanie 157 — Oblicz następujące całki nieoznaczone z funkcji wymiernych:

1. $\int \frac{2x+1}{3x+2}\,dx$
2. $\int \frac{1}{(x-2)(x+5)}\,dx$
3. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$
4. $\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$
5. $\int \frac{1}{x(x^2-1)}\,dx$. Wskazówka: Wyznacz takie liczby A, B i C, że $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$.
6. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$. Wskazówka: Zastosuj podstawienie $x = \tan(u)$.
7. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$,
8. $\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$

Zadanie 158 — Rozważamy funkcję $f(x) = x^2$ na odcinku $[0, 1]$. Rozważamy sumę dolną

$$s_n(f, 0, 1) = \sum_{k=0}^{n-1} \inf\left\{f(x) : \frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}\right\}\frac{1}{n}\,.$$

1. Korzystając ze wzoru $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ wyznacz zwartą postać wzoru na $s_n(f,0,1)$
2. Oblicz $\lim_{n\to\infty} s_n(f,0,1)$
3. Oblicz $\int_0^1 x^2dx$ za pomocą całki nieoznaczonej :–)

Zadanie 159 — Oblicz objętość torusa powstałego przez obrót koła $x^2+(y-a)^2 \leq r^2$.

Zadanie 160 — Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót wykresu funkcji $f(x) = \sin(x)$ dla $x \in [0, 2\pi]$.

6 Szeregi

Zadanie 161 — Pokaż, że jeśli szeregi $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$ są zbieżne oraz a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, to szereg $\sum_n (a \cdot a_n + b \cdot b_n)$ jest zbieżny oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a \cdot a_n + b \cdot b_n) = a\sum_{n=0}^{\infty} a_n + b\sum_{n=0}^{\infty} b_n \ .$$

Zadanie 162 — Oblicz sumy $\sum_{n\geq n}(\frac{3}{2^n}+\frac{1}{3^n})$, $\sum_{n\geq 1}\sum_{k=2}^{5}\left(\frac{1}{k}\right)^n$

Zadanie 163 — Oblicz sumy $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+2)}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+3)}$.
Wskazówka: Znajdź liczby A i B takie, że $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}$.

Zadanie 164 — Zbadaj zbieżność następujących szeregów: $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$,$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Zadanie 165 — Zastosuj kryterium zbieżności d'Alamberta do zbadania zbieżności szeregów $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n+1}{3^n+1}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Zadanie 166 — Wyznacz promienie zbieżności następujących szeregów potęgowych:
1. $\sum\limits_n \frac{1}{n+2}x^n$
2. $\sum\limits_n \frac{1}{\sqrt{n}}x^n$
3. $\sum\limits_n \frac{(-1)^n}{n}x^n$
4. $\sum\limits_n n2^n x^n$
5. $\sum\limits_n \frac{1}{n^n}x^n$
6. $\sum\limits_n \frac{(n!)^k}{(kn)!}x^n$ (dla ustalonego naturalnego $k>0$)

Zadanie 167 — Rozwiń następujące funkcje w szereg Maclaurina i wyznacz ich promienie zbieżności:
1. $f(x) = \sin(x)$
2. $g(x) = \cos(x)$
3. $f(x) = \ln\frac{1}{1-x}$
4. $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$

Zadanie 168 — Niech d oznacza odległość zbieżności jednostajnej na odcinku $[0, 1$, czyli

$$d(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in [0,1]\} \ ,$$

dla ograniczonych funkcji f i g. Wyznacz odległości $d(f,g)$ następujących par funkcji:
1. $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$
2. $f(x) = x$, $g(x) = x(1-x)$

Zadanie 169 — Pokaż, że ciąg funkcji $f_n(x) = x + \frac{1}{n}\sin(nx)$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$.

Zadanie 170 — Niech $f_n(x) = x^n + x$ dla $x \in [0,1]$.

1. Pokaż, że ciąg funkcyjny (f_n) jest punktowo zbieżny
2. Czy ciąg ten jest jednostajnie zbieżny?

Zadanie 171 — Czy ciąg funkcji $f_n(x) = (1 + \frac{1}{n})x$ jest punktowo zbieżny? Czy jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$? Czy jest jednostajnie zbieżny na odcinku $[0,1]$?

Zadanie 172 — Wyznacz szeregi Fouriera (na odcinku $[-\pi,\pi]$) następujących funkcji oraz narysuj ich wykresy oraz ich kilka pierwszych przybliżeń szeregami trygonometrycznymi:

1. $f(x) = |x|$, $g(x) = |x| + \sin(x)$
2. $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$
3. $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{sgn})(x)$

Zadanie 173 — Wyznacz sinusowy szereg Fouriera funkcji $f(x) = x(\pi?x)$ na odcinku $[0,\pi]$. Skorzystaj z tego szeregu do wyznaczenia wartości szeregu

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \ldots .$$

Zadanie 174 — Wyznacz szereg Fouriera funkcji $f(x) = x^2$ na odcinku $[-\pi,\pi]$.

1. Podstawiaj za x liczbę π oblicz $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$
2. Wyznacz $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^2}$
3. Wyznacz $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$

Powodzenia,
Jacek Cichoń