Wstęp do Logiki i Teorii Mnogości
egzamin podstawowy

Jacek Cichoń
WPPT PWr

05.02.2015

Zadanie 1.0. Niech $\phi = \pi \models (p_1 \to p_2) \wedge (p_3 \to p_4) \wedge (p_5 \to p_6)$. Ile jest waluacji $\pi : \{p_1, \ldots, p_6\} \to \{0, 1\}$ takich, że $\pi \models \phi$?

Rozwiązanie. Naszy celem jest wyznaczenie liczby waluacji $\pi : \{p_1, \ldots, p_6\} \to \{0, 1\}$ takich, że

$$\pi(p_1 \to p_2) = 1 \wedge \pi(p_3 \to p_4) = 1 \wedge \pi(p_5 \to p_6) = 1$$

Niech $A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$. Zauważmy, że jeśli $i \neq j$ to $\pi(p_i \to p_j) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\pi(i), \pi(j)) \in A$. Zatem

$$\pi \models \phi \leftrightarrow ((\pi(1), \pi(2)), (\pi(3), \pi(4)), (\pi(5), \pi(6))) \in A \times A \times A ,$$

wiec szukanych waluacji mamy $|A \times A \times A| = 3^3 = 27$.

Zadanie 1.1. Niech $\phi = (p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge (p_3 \to p_4) \wedge (p_4 \to p_5) \wedge (p_5 \to p_6)$. Ile jest waluacji $\pi : \{p_1, \ldots, p_6\} \to \{0, 1\}$ takich, że $\pi \models \phi$?

Rozwiązanie. Jedną z takich waluacji jest waluacja przyporządkowujące każdej zmiennej zdaniowej ze zbioru $\{p_1, \ldots, p_6\}$ wartość logiczną zero. Zauważmy następnie, że jeśli $1 \leq i < 6$, $\pi(p_i) = 1$ oraz $\pi(\varphi) = 1$, to wtedy $\pi(p_i \to p_{i+1}) = 1$, więc również $\pi(p_{i+1}) = 1$. Szukane pozostałe waluacje przyjmują więc najpierw wartość 0, a potem, od pewnego miejsca wartość 1. Takich ciągów jest 6. Zatem liczba waluacji takich, że $\pi(\phi) = 1$ wynosi 7.

Zadanie 2.1. Dla $X, Y \in P(\{1, \ldots, 10\})$ określamy relację

$$(X \sim Y) \leftrightarrow (X \cap \{2, 3, 4\} = Y \cap \{2, 3, 4\} .$$

Wyznacz $|P(\{1, \ldots, 10\})/ \sim |$.

Rozwiązanie. Dla $X \in P(\{1, \ldots, 10\})$ określamy funkcję $f(X) = X \cap \{2, 3, 4\}$. Wtedy $f : P(\{1, \ldots, 10\}) \to P(\{2, 3, 4\})$ oraz $f(X) = f(Y) \leftrightarrow X \sim Y$. Ponadto $\mathrm{rng}(f) = P(\{2, 3, 4\})$, więc

$$|P(\{1, \ldots, 10\})/ \sim | = |\mathrm{rng}(f)| = |P(\{2, 3, 4\})| = 2^3 = 8 .$$

Zadanie 2.1. Dla $X, Y \in P(\{1, \ldots, 10\})$ określamy relację

$$(X \sim Y) \leftrightarrow (|X \cap \{2, 3, 4\}| = |Y \cap \{2, 3, 4\}| .$$

Wyznacz $|P(\{1, \ldots, 10\})/ \sim |$.

Rozwiązanie. Dla $X \in P(\{1,\ldots,10\})$ określamy funkcję $f(X) = |X \cap \{2,3,4\}|$. Wtedy $f : P(\{1,\ldots,10\}) \to \{0,1,2,3\}$ oraz $f(X) = f(Y) \leftrightarrow X \sim Y$. Ponadto $\mathrm{rng}(f) = \{0,1,2,3\}$, więc

$$|P(\{1,\ldots,10\})/\sim| = |\mathrm{rng}(f)| = |\{0,1,2,3\}| = 4 \ .$$

Zadanie 4. Niech $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^n + |y|^n < 1\}$. Wyznacz $\bigcup_{n\geq 1} A_n$.

Rozwiązanie. Niech $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Jeśli $(x,y) \in A$, to $(x,y) \in A_n$ dla pewnego $n \geq 1$, więc $|x|^n + |y|^n < 1$ dla pewnego $n \geq 1$, więc $|x| < 1$ oraz $|y| < 1$. Zatem $A \subseteq (-1,1)^2$.

Odwrotnie, jeśli $(x,y) \in (-1,1)^2$, to $\lim_n |x|^n = \lim_n |y|^n = 0$, jest więc n takie, że $|x|^n < \frac{1}{2}$ i $|y|^n < \frac{1}{2}$, wiec dla takiego n mamy $|x|^n + |y|^n < 1$, zatem $(x,y) \in A_n$.

Pokazaliśmy więc, że $A = (-1,1) \times (-1,1)$.

Zadanie 5. Niech $\mathbb{P}$ oznacza zbiór wszystkich bijekcji ze zbioru liczb naturalnych w zbiór liczb naturalnych. Wyznacz $|\mathbb{P}|$.

Rozwiązanie. Jest jasne, że $|\mathbb{P}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Pokażmy, że również $\mathfrak{c} \leq |\mathbb{P}|$ (wtedy z Twierdzenia Cantora-Bernsteina otrzymamy równość $|\mathbb{P}| = \mathfrak{c}$).

Niech $\Omega = \mathbb{N} \times \{0,1\}$. Dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N}$ określamy $f_A : \Omega \to \Omega$ wzorem

$$f_A(n,i) = \begin{cases} (n, 1-i) & n \in A \\ (n,i) & n \notin A \end{cases}$$

Każda funkcji f_A jest bijekcją zbioru Ω. Co więcej, przyporządkowanie $A \to f_A$ jest różnowartościowe, gdyż z funkcji f_A można odtworzyć zbiór A ($n \in A \leftrightarrow f_A((n,0)) = (n,1)$). Zatem

$$\mathfrak{c} = |P(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{P}_\Omega| \ ,$$

gdzie $\mathbb{P}_\Omega$ oznacza zbiór wszystkich bijekcji zbioru Ω. Lecz $|\Omega| = \aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0$, więc $|\mathbb{P}_\Omega| = |\mathbb{P}|$.

Pokazaliśmy więc, że $|\mathbb{P}| = \mathfrak{c}$.