Przykładowe zadania na egzamin z LiSF

styczeń, 2020

Zadanie 1 *Pokaż, że*

$$\{\neg p, q \to p, r \vee q, \neg s, \neg(\alpha \wedge \neg\beta)\} \models (\neg\alpha \to (p \vee q)) \to (((\beta \wedge r) \vee s) \vee ((\beta \vee r) \wedge r)) \ .$$

Zadanie 2 *Dla* $A \subseteq \mathbb{N}$ *określamy* $A + 1 = \{a + 1 : a \in A\}$. *Niech* $\mathcal{A} = \{A \in P(\mathbb{N}) : A \cap (A + 1) = \emptyset\}$. *Wyznacz moc* $|\mathcal{A}|$.

Zadanie 3 *Niech* $\mathcal{X} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \preceq)$, *gdzie* $a \preceq b \equiv (a|b)$. *Łańcuch* L *w* $\mathcal{X}$ *nazywamy maksymalnym jeśli dla każdego zbioru* $L \subseteq A \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *takiego, że* $L \neq A$ *zbiór* A *nie jest łańcuchem.*

1. *Wskaż przykład jakiegoś łańcucha maksymalnego w* $\mathcal{X}$.
2. *Wyznacz moc zbioru wszystkich łańcuchów maksymalnych w częściowym porządku* $\mathcal{X}$.

Zadanie 4 *Niech* $C(a, b, c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + a)^2 + (y + b)^2 = c^2\}$ *oraz*

$$\mathcal{C} = \{C(a, b, c) : \max\{|a|, |b|, |c|\} \leqslant 1\} \ .$$

Wyznacz i naszkicuj zbiór $\bigcup \mathcal{C}$.

Zadanie 5 *Niech* $f((x, y)) = \max\{|x|, |y|\}$ *będzie funkcją o dziedzinie* $\mathbb{R}^2$. *Na zbiorze* $\mathbb{R}^2$ *określamy relację równoważności* $\sim \mathbb{R}^2$ *wzorem*

$$((a, b) \sim (x, y)) \equiv (f(a, b) = f(x, y)) \ .$$

Niech $I = \mathbb{R}^2/\sim$ *będzie zbiorem wszystkich klas abstrakcji relacji* $\sim$.

1. *Wyznacz* $|I|$.
2. *Podaj przykład prostego selektora rodziny* I.
3. *Wyznacz moc zbioru wszystkich selektorów rodziny* I

Zadanie 6 (dodatkowe; na 5.5) *Załóżmy,* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. *Oblicz* $\aleph_1^{\aleph_0}$.