Teoria Grafów
Lista zadań

Jacek Cichoń
Politechnika Wrocławska, WPPT

Wrocław • 2020

1 Wstęp do teorii grafów

* Zadanie 1

Niech G będzie grafem prostym. Pokaż, że G jest spójny lub $\overline{G}$ (dopełnienie grafu G) jest spójny. Podaj przykład takiego grafu G,że zarówno G jak i $\overline{G}$ są grafami spójnymi.

Rozwiązanie 1

Załóżmy, że graf G nie jest spójny. Nich $C_1, \ldots, C_k$ ($k \geqslant 2$) będą jego składowymi spójnymi. Wtedy $(\forall i \neq j)(\forall x \in C_i)(\forall y \in C_j)(\{x,y\} \notin E(G))$, czyli $(\forall i \neq j)(\forall x \in C_i)(\forall y \in C_j)(\{x,y\} \in E(\overline{G}))$. Zatem jeśli $i \neq j$, $x \in C_i$ oraz $y \in C_j$ to mamy drogę od x do y. Jeśli zaś $x, y \in C_i$, to weźmy dowolne $j \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i\}$ (takie j istnieje, bo $k \geqslant 2$) oraz weźmy dowolne $z \in C_j$ (takie z istnieje, bo C_j jest składową spójną, jest więc zbiorem niepustym). Wtedy $\{x, z\} \in E(\overline{G})$ oraz $\{z, y\} \in E(\overline{G})$, zatem również mamy drogę od x do y w grafie $\overline{G}$

* Zadanie 2

Niech $\mathcal{G} = (V, E)$ będzie grafem prostym takim, że $|E| > \binom{|V|-1}{2}$. Pokaż, że $\mathcal{G}$ jest grafem spójny.

Rozwiązanie 2

Niech $|V| = n$. Załóżmy, że $|E| > \binom{n-1}{2}$ oraz, że G nie jest spójny. Z poprzedniego zadania wynika, że graf $\overline{G}$ jest spójny. Lecz

$$|E(\overline{G})| = \binom{n}{2} - |E| < \binom{n}{2} - \binom{n-1}{2} =$$
$$\frac{1}{2}(n(n-1) - (n-1)(n-2)) = \frac{1}{2}(n-1)(n-(n-2)) = n-1\ ,$$

zatem $|E(\overline{G})| < n - 1$, a wiemy, że spójny graf o n wierzchołkach ma co najmniej $n - 1$ krawędzi.

Zadanie 3

Pokaż, że w każdym grafie prostym o co najmniej dwóch wierzchołkach są dwa wierzchołki o takim samym rzędzie.

Rozwiązanie 3

Niech $G = (V, E)$ i $n = |V|$. Rozważamy dwa przypadki.

Przypadek I: Istnieje wierzchołek izolowany Niech a bedzie wierzchołkiem izolowanym. Wtedy dla dowolnego $x \in V \setminus \{a\}$ mamy $\mathcal{N}(x) \subseteq V \setminus \{a, x\}$, więc $\deg(x) \leqslant n - 2$. Zatem $\deg : V \to \{0, \ldots, n-2\}$. Ale $|V| = n$ i $|\{0, \ldots, n-2\}| = n - 1$, więc deg nie jest injekcją.

Przypadek II: Nie istnieje wierzchołek izolowany Wtedy $\deg : V \to \{1, \ldots, n-1\}$. Zatem deg nie jest injekcją.

Zadanie 4

Pokaż, że graf cykliczny C_n jest grafem dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie 4

Jeśli $n = 2k$, to C_n rozkłada się na dwa zbiory $X = \{1, 3, 2k-1\}$ i $Y = \{2, 4, \ldots, 2k\}$. Jeśli n nie jest parzysta, to wystarczy skorzystać z charakteryzacji grafów dwudzielnych: są to te grafy w których wszystkie cykle są długości parzystej.

Zadanie 5

Wyznacz średnicę i rzędy elementów w hiper-kostce Q_n.

Zadanie 6

Pokaż, że dla każdego $n \geqslant 1$ hiper-kostka Q_n jest grafem dwudzielnym.

Rozwiązanie 6

Niech $w(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Wystarczy położyć $X = \{x \in Q_n : 2|w(x)\}$ oraz $Y = \{x \in Q_n : \neg(2|w(x))\}$.

Zadanie 7

Pokaż, że grafy Q_2 i $K_{2,2}$ są izomorficzne

Rozwiązanie 7

Oba grafy są izomorficzne z cyklem C_4.

Zadanie 8

Niech (V, E, ϕ) będzie grafem. Dla $e \in E$ określamy

$$w(e) = \deg(x) + \deg(y)$$

jeśli $\phi(e) = \{x, y\}$. Pokaż, że

$$\sum_{e \in E} w(e) = \sum_{v \in V} \deg^2(x) \ .$$

Rozwiązanie 8

Niech $S = \{e \in E : |\phi(e)| = 1\}$ oraz $D = \{e \in E : |\phi(e)| = 2\}$.

$$\sum_{e \in E} w(e) = \sum_{e \in S} w(e) + \sum_{e \in D} w(e) =$$
$$\sum_{e \in S} \sum_{x} (\deg(x) + \deg(x)) ||\phi(x) = \{x\}|| + \sum_{e \in D} \sum_{x} \sum_{y} ||e = \{x, y\}||$$

Liczymy pierwszą sumę:

$$\sum_{e \in L} w(e) = \sum_{e \in S} \sum_{x} ||\phi(x) = \{x\}|| (\deg(x) + \deg(x)) = \sum_{x} \sum_{e \in S} 2 ||\phi(x) = \{x\}|| \deg(x) =$$
$$\sum_{x} \deg(x) \cdot 2 \cdot \sum_{e \in S} ||\phi(x) = \{x\}|| \ .$$

Liczymy drugą sumę:

$$\sum_{e \in D} w(e) = \frac{1}{2} \sum_{e \in D} \sum_{x} \sum_{y} ||\phi(x) = \{x, y\}|| (\deg(x) + \deg(y)) =$$
$$\frac{1}{2} \left(\sum_{e \in D} \sum_{x} \sum_{y} ||\phi(x) = \{x, y\}|| \deg(x) + \sum_{e \in D} \sum_{x} \sum_{y} ||\phi(x) = \{x, y\}|| \deg(y) \right) =$$
$$\frac{1}{2} \left(\sum_{x} \deg(x) \sum_{e \in D} \sum_{y} ||\phi(x) = \{x, y\}|| + \sum_{y} \deg(y) \sum_{e \in D} \sum_{x} ||\phi(x) = \{x, y\}|| \right) =$$
$$\sum_{x} \deg(x) \sum_{e \in D} \sum_{y} ||\phi(x) = \{x, y\}|| \ .$$

Zatem

$$\sum_{e \in E} w(e) = \sum_{x} \deg(x) \left(2 \sum_{e \in S} ||\phi(x) = \{x\}|| + \sum_{e \in D} \sum_{y} ||\phi(x) = \{x, y\}|| \right) =$$
$$\sum_{x} \deg(x) \deg(x) = \sum_{x} \deg^2(x) \ .$$

Zadanie 9

Pokaż, że w każdym spójnym grafie prostym o dwóch lub więcej wierzchołkach istnieją co najmniej dwa nierozcinające wierzchołki.
Uwaga: Wierzchołek x nazywamy nierozcinającym jeśli jego usunięcie nie zwiększa liczby składowych spójnych grafu.
Wskazówka: Sprawdź, że teza jest prawdziwa dla grafów o 2 oraz 3 wierzchołkach. Zastosuj indukcję matematyczną $n \to n+1$ startując od n=3; będziesz miał do rozważenie kilka przypadków.

Rozwiązanie 9

Dowód indukcyjny. Teza twierdzenia jest oczywiście prawdziwa dla $n = 2$ i $n = 3$ (bo te grafy są izomorficzne z K_2, K_3 lub L_3. Załóżmy więc, że $n \geqslant 3$ oraz, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich grafów prostych spójnych o $\leqslant n$ wierzchołkach. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem o $n + 1$ wierzchołkach. Ustalmy dowolny wierzchołek $a \in V$.

Jeśli a nie rozcina G, to $G' = G \setminus \{a\}$ jest spójny, ma n wierzchołków , więc ma dwa nierozcinające wierzchołki; one są też nierozcinające w G (bo w jest więcej krawędzi); więc mamy co najmniej trzy nierozcinające wierzchołki w G.

Załóżmy więc, że a rozcina G. Niech $C_1, \ldots, C_k$ ($k \geqslant 2$) będą komponentami spójnymi $G \setminus \{a\}$. Jeśli $C_i = \{x\}$, to $\mathcal{N}(x) = \{a\}$, więc x nie rozcina G. Jeśli zaś $|C_i| \geqslant 2$, to w C_i są wierzchołki co najmniej dwa wierzchołki nierozcinające, więc one są nierozcinajace w G.

A teraz **dowód bez indukcji**, korzystający z własności drzew: Rozważmy dowolne drzewo T rozpinające tego grafu. Ma ono tyle samo wierzchołków co dany graf, więc ma co najmniej dwa wierzchołki. A w takim grafie są co najmniej dwa liście. Liście są nierozcinające. Nie mogą więc one rozspajać oryginalnego grafu.
Uwaga: Jest to jeden z przykładów pokazujących pożyteczność pojęci drzewa.

* Zadanie 10

Załóżmy, że spójny graf prosty ma dokładnie dwa nierozcinające wierzchołki. Pokaż, że jest to graf liniowy.

Rozwiązanie 10

Niech $G = (V, E)$ będzie takim grafem. Niech $a, b \in V$ będą tymi dwoma nierozcinającymi wierzchołkami. Niech $P = \{a, x_1, \ldots, x_n, b\}$ będzie drogą od a do b.
Claim: $V = P$.
Załóżmy, że to nie jest prawdą. Niech $y \in V \setminus P$. Wierzchołek y jest rozcinający. Niech $C_1, \ldots, C_k$ ($k \geqslant 2$) będą komponentami spójnymi $G \setminus \{y\}$. W jednej z komponent zawarta jest ścieżka P. Możemy założyć, że $P \subseteq C_1$.

Przyjrzyjmy się komponencie C_2. Jeśli $C_2 = \{c\}$, to $\mathcal{N}(c) = \{y\}$ więc c nie rozspaja grafu G, więc w grafie G mielibyśmy trzy wierzchołki nierozcinające. Załóżmy więc, że $|C_2| \geqslant 2$. Wtedy w C_2 mamy dwa wierzchołki nierozcinające: oznaczmy je przez c i d. Jeśli $\{y, c\} \in E$ to d nie rozspójnia G. Podobnie, jeśli $\{y, d\} \in E$, to c nie rozspójnia grafu G. Jeśli zaś ani c ani d nie są połączone z y to żaden z nich nie rozspójnia G.

Tak więc we wszystkich przypadkach mielibyśmy trzy wierzchołki nierozcinające.

Zadanie 11

Niech $G = G(X, Y)$ będzie grafem dwudzielnym.

1. Pokaż, że $\sum_{x \in X} \deg(x) = \sum_{y \in Y} \deg(y)$.
   Wskazówka: Możesz zacząć tak:
   $$\sum_{x \in X} \deg(x) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} ||\{x, y\} \in E|| = \ldots$$
   .
2. Pokaż, że jeśli G jest k-regularny dla jakiegoś $k > 0$, to $|X| = |Y|$.
   Wskazówka: Wystarczy, że sobie przypomnisz co to znaczy, że graf jest regularny i skorzystasz z poprzedniego punktu.

Rozwiązanie 11

Punkt (1):

$$\sum_{x \in X} \deg(x) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} ||\{x, y\} \in E|| =$$
$$\sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} ||\{x, y\} \in E|| = \sum_{y \in Y} \deg(y)$$

Punkt (2): załóżmy, że graf dwudzielny $G(X, Y)$ jest k-regularny. Wtedy, na mocy poprzedniego punktu, mamy

$$k \cdot |X| = \sum_{x \in X} \deg(x) = \sum_{y \in Y} \deg(y) = k \cdot |Y| \ ,$$

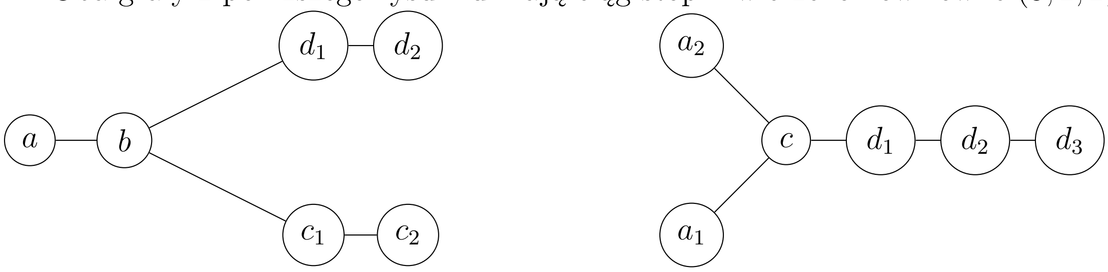
więc $|X| = |Y|$ (bo $k > 0$).

Zadanie 12

Podaj przykład dwóch nieizomorficznych grafów o tym samym ciągu stopni wierzchołków.

Rozwiązanie 12

Oba grafy z poniższego rysunku mają ciąg stopni wierzchołków równe $(3, 2, 2, 1, 1, 1)$:



One nie są izomorficzne: w pierwszym grafie najdłuższa droga wynosi 3 a w drugim 4.

Zadanie 13

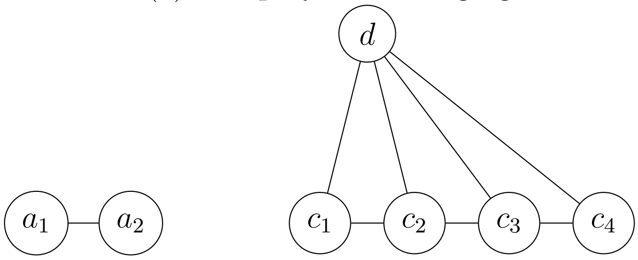
Rozstrzygnij czy następujące ciągi są graficzne i jeśli ciąg jest graficzny, to znajdź graf prosty o tym ciągu stopni:

1. $(4, 3, 2, 1, 0)$
2. $(4, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$
3. $(6, 4, 4, 4, 3, 1, 1, 1)$

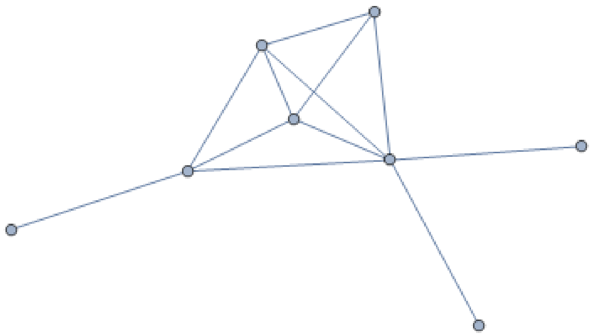
Rozwiązanie 13

Punkt (1): nie ma takiego grafu; oto uzasadnienie: graf taki musiałby mieć 5 wierzchołków i jeden z nich miałby rząd 4; miałby więc on krawędź ze wszystkimi innymi; więc żaden wierzchołek nie może mieć rzędu 0.

Punkt (2): oto przykład takiego grafu



Punk (3): oto przykład takiego grafu:



Przykłady z punktów (2) i (3) zbudować można tak: bierzemy rozważany ciąg; stosujemy twierdzenie Havela-Hakimi tak długo aż otrzymamy ciąg rzędów dla którego potrafie znaleźć odpowiadający im graf a potem odwracamy proces. Po kilku próbach dochodzi się do wprawy.

Zadanie 14

Pokaż, że grafy proste G_1 i G_2 są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy ich dopełnienia $\overline{G_1}$ i $\overline{G_2}$ są izomorficzne.
Wskazówka: $\models ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((\neg p) \leftrightarrow (\neg q)))$.

Rozwiązanie 14

Niech $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ i niech $f : V_1 \to V_2$ będzie izomorfizmem grafów. Wtedy dla dowolnych $x, y \in V_1$ mamy

$$\{x, y\} \in E(G_1) \leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E(G_2)$$

więc

$$\{x, y\} \notin E(G_1) \leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \notin E(G_2)$$

czli

$$\{x, y\} \in E(\overline{G_1}) \leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in \overline{E(G_2)}$$

Zadanie 15

Wyznacz wszystkie grafy proste o czterech wierzchołkach z dokładnością do izomorfizmu.

Zadanie 16

Załóżmy, że $G[X, Y]$ jest grafem dwudzielnym takim, że dla każdego $x \in X$ oraz $y \in Y$ mamy $\deg(x) \geqslant \deg(y) > 0$). Pokaż, że $|X| \leqslant |Y|$.
Wskazówka: Dowód jest dosyć pomysłowy: zauważ, że

$$|X| = \sum_{x \in X} 1 = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} ||\{x, y\} \in E|| \frac{1}{\deg(x)}$$

.

Rozwiązanie 16

Postępujemy zgodnie ze wskazówką:

$$|X| = \sum_{x\in X} 1 = \sum_{x\in X} \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y\in Y} ||\{x,y\}\in E|| =$$

$$\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} ||\{x,y\}\in E|| \frac{1}{\deg(x)} \leqslant \sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} ||\{x,y\}\in E|| \frac{1}{\deg(y)} =$$

$$\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} ||\{x,y\}\in E|| \frac{1}{\deg(y)} = \sum_{y\in Y} \frac{1}{\deg(y)} \sum_{x\in X} ||\{x,y\}\in E|| =$$

$$\sum_{y\in Y} 1 = |Y| \; .$$

Zadanie 17

Pokaż, że graf $\overline{L(K_5)}$ jest izomorficzny z grafem Petersena.
Wskazówka: *Ponumeruj wierzchołki grafu K_5 elementami grupy C_5, czyli liczbami ze zbioru $\{0,1,2,3,4\}$. Pokaż, że*

$$\overline{L(K_5)} \cong ([C_5]^2, \{\{A,B\} : A\cap B = \emptyset\}) \; .$$

Podziel następnie dwuelementowe podzbiory zbioru C_5 na dwie grupy $X = \{\{k,k+1\} : k = 0,\ldots,4\}$ i $Y = \{\{k,k+2\} : k = 0,\ldots,4\}$ (działania modulo 5) ułóż je w cykle. Zakończenie jest proste - dorysuj brakujące krawędzie. .

Rozwiązanie 17

Zauważ, że $K_5 \cong (C_5, [C_5]^2)$. Zatem

$$L(K_5) \cong ([C_5]^2, \{\{A,B\} : A,B\in [C_5]^2 \wedge A\neq B \wedge A\cap B\neq\emptyset\}) \; ,$$

a więc

$$\overline{L(K_5)} \cong ([C_5]^2, \{\{A,B\} : A,B\in [C_5]^2 \wedge A\cap B=\emptyset\}) \; .$$

Układamy teraz wierzchołki postaci $\{k,k+1\}$ w cykl (działanie modulo 5); otrzymujemy cykl:

$$\{0,1\}\sim\{2,3\}\sim\{4,0\}\sim\{1,2\}\sim\{3,4\}\sim\{0,1\}$$

Narysuj ten cykl na okręgu. Brakujące 5 podzbiorów z $[C_5]^2$ rozmieszczaj wewnątrz tego cyklu w taki sposób: do wierzchołka $\{0,1\}$ dołącz taki brakujący podzbiór A, że $\{0,1\}\cap A = \emptyset$, itd. Na koniec: dołącz brakujące krawędzie do wierzchołków wewnątrz zewnętrznego cyklu.

Zadanie 18

Załóżmy, że długość każdego cyklu prostego w danym grafie jest podzielna przez liczbę k. Pokaż, że długość dowolnego cyklu w tym grafie jest podzielna przez liczbę k.
Uwaga: Sprawy terminologiczne: przez **cykl** w grafie $G = (V,E,\phi)$ rozumiemy tutaj ciąg

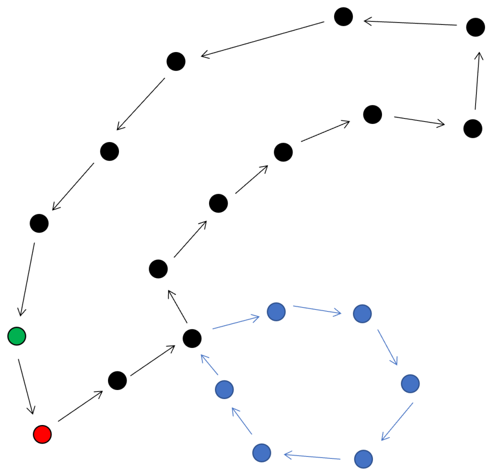
$$x_0, e_1, x_1 \ldots, e_n, x_n, e_{n+1}, x_{n+1}$$

taki, że $x_{n+1} = x_0$, $\phi(e_i) = \{x_{i-1}, x_i\}$ dla każdego $i = 1,\ldots,n$ oraz, że $e_i \neq e_j$ dla dowolnych $1\leqslant i<j\leqslant n_1$ (czyli bez powtórzonych krawędzi). **Cykl prosty** to jest cykl bez powtórzonych wierzchołków. .
Wskazówka: *Załóżmy że dany cykl nie jest prosty. Niech $i = \min\{k : x_k \in \{x_0,\ldots,x_{k-1}\}\}$. Niech $j = \min\{i : x_i = x_j\}$. Pokaż, że $x_j, x_{j+1},\ldots,x_i,x_j$ jest cyklem prostym. .*

Rozwiązanie 18

Wiemy, że każdy cykl zawiera cykl prosty. Dowód przeprowadzimy przez indukcję. Cykl o najmniejszej długość (oznaczmy tę liczbę przez d) jest więc cyklem prostym. Zatem $k|d$. Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla wszystkich cykli o długości mniejszej niż n i niech $C = (x_0, \dots, x_n, x_0)$ będzie cyklem. Jeśli jest on prosty, to teza jest prawdziwa. Załóżmy więc, że nie jest prosty. Tak jak we wskazówce definiujmy $i = \min\{k : x_k \in \{x_0, \dots, x_{k-1}\}\}$ oraz $j = \min\{i : x_i = x_j\}$. Wtedy $i < n$ (inaczej C byłby cyklem prostym), $j \leqslant i - 2$ oraz $(x_j, x_{j+1}, \dots, x_i, x_j)$ jest cyklem prostym. Zatem $k|(j - i)$. Usuńmy ten podcykl z C. Otrzymamy cykl $C' = (x_0, \dots, x_j, x_{k+1}, \dots, x_n, x_0)$. Jest on krótszy od n, zatem jego długość jest podzielna przez k. Długość cyklu C jest sumą długości cyklu C' oraz liczby $j - 1$. Jest więc podzielna przez k.

Poniższy obrazek ilustruje powyższe rozumowanie: czerwone kółko - x_0; zielone kółko - x_n, wierzchołki podcyklu, z wyjątkiem pierwszego, oznaczone są kolorem niebieskim :



Zadanie 19

Produktem kartezjańskim grafów $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ nazywamy graf $G_1 \times G_2$ o zbiorze wierzchołków $V_1 \times V_2$ oraz zbiorze krawędzi

$$E = \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} : (x_1 = x_2 \wedge \{y_1, y_2\} \in E_2) \vee (\{x_1, x_2\} \in E_1 \wedge y_1 = y_2)\}$$

1. Wyznacz grafy $L_3 \times L_4$, $C_2 \times C_5$
2. Wyznacz $\deg((x, y))$ w $G_1 \times G_2$.
3. Wyznacz liczbę krawędzi w grafie $G_1 \times G_2$

Rozwiązanie 19

Punkt (1): siatka (grid) o wymiarach 3×4 oraz dwa cykle długości 5 połączone w najprostszy sposób
Punkt (2): Zauważmy, że $\mathcal{N}((x, y)) = (\mathcal{N}(x) \times \{y\}) \cup (\{x\} \times \mathcal{N}(y))$ zatem

$$\deg((x, y)) = \deg(x) + \deg(y) \ .$$

PUnkt (3). Mamy

$$2|E| = \sum_{x\in V_1}\sum_{y\in V_2}\deg((x,y)) = \sum_{x\in V_1}\sum_{y\in V_2}(\deg(x)+\deg(y)) =$$
$$\sum_{x\in V_1}\sum_{y\in V_2}\deg(x) + \sum_{x\in V_1}\sum_{y\in V_2}\deg(y) = \sum_{x\in V_1}\deg(x)\sum_{y\in V_2}1 + \sum_{y\in V_2}\deg(y)\sum_{x\in V_1}1 =$$
$$\sum_{x\in V_1}\deg(x)|V_2| + \sum_{y\in V_2}\deg(y)|V_1| = 2\cdot|E_1|\cdot|V_2| + 2\cdot|E_2|\cdot|V_1|\ ,$$

więc

$$|E| = |E_1|\cdot|V_2| + |E_2|\cdot|V_1|\ .$$

Zadanie 20

Niech G będzie grafem oraz niech $e = \{x, y\}$ będzie krawędzią grafu G. **Elementarny podpodział** krawędzi e polega na dodaniu do zbioru wierzchołków grafu nowego wierzchołka w, dodaniu do zbioru krawędzi $\{x, w\}$ i $\{w, x\}$ oraz usunięciu krawędzi e.

Barycentrycznym podpodziałem grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf otrzymany z grafu G po zastosowaniu operacji elementarnego podpodziału do każdej krawędzi ze zbioru E.

1. Ile wierzchołków ma barycentryczny podpodział grafu G?
2. Ile krawędzi ma barycentryczny podpodział grafu G?
3. Pokaż, że po dwukrotnym zastosowaniu operacji podziału barycentrycznego otrzymujemy graf prosty.

Rozwiązanie 20

Niech (V', E') będzie barycentrycznym podpodziałem grafu G.
Punkt (1): $|V'| = |V| + |E|$
Punkt (2): $|E'| = 2|E|$
Punkt (3):

2 Grafy eulerowskie i ścieżki Hamiltona

Zadanie 21

1. Dla jakich n grafy K_n są eulerowskie; dla jakich n są one hamiltonowskie?
2. Dla jakich par liczb n, m grafy $K_{n,m}$ są eulerowskie lub zawierają ścieżką Eulera?
3. Dla jakich par liczb n, m grafy $K_{n,m}$ są hamitonowskie lub zawierają ścieżką Hamiltona?

Zadanie 22

1. Czy graf Petersena jest grafem Eulera?
2. Wyznacz długości cykli prostych w grafie Petersena.
   Wskazówka: *Wystarczy przyjrzeć się cyklom zaczynającym się jednego ustalonego wierzchołka.*
3. Pokaż, że graf Petersena zawiera ścieżkę Hamiltona.

4. Załóż, że $x_0, \ldots, x_9$ jest cyklem Hamiltona w grafie Petersena. Zauważ, że na cyklu tym występuje 10 krawędzi. W grafie mamy więc 5 niewykorzystanych krawędzi. Pokaż, że nie mogą to być krawędzie $\{\{x_i, x_{i+5}\} : i = 0, \ldots, 4\}$.
   Wskazówka: *Skorzystaj z tego, że w grafie tym nie cykli długości 4.*
5. Wywnioskuj z tego, że graf Petersena nie jest hamiltonowski, czyli, że nia zawiera cyklu Hamiltona.
   Wskazówka: *Ponownie skorzystaj z tego, że w grafie tym nie cykli długości 4.*

Zadanie 23

Podaj przykład spójnego grafu prostego o $n \geqslant 3$ wierzchołkach który nie jest hamiltonowski, a dla którego mamy $\deg(x) + deg(y) \geqslant n - 1$ dla każdej pary nieincydentnych wierzchołków.
Wskazówka: *Poszukaj najpierw grafu o możliwie małej liczbie wierzchołków, a potem spróbuj znaleźć przykład dla dowolnego n.*
Uwaga: Przykład ten pokazuje, że w twierdzeniu Ore nie można zamienić warunku $\deg(x) + deg(y) \geqslant n$ warunkiem $\deg(x) + deg(y) \geqslant n - 1$.

Zadanie 24

Załóżmy, że $n \geqslant 3$, $A, B \subseteq \{2, \ldots, n-1\}$ są zbiorami niepustymi oraz $|A| + |B| \geqslant n$. Pokaż, że istnieje $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ takie, że $i \in B$ oraz $i + 1 \in A$.
Uwaga: Ten fakt jest wykorzystywany w dowodzie twierdzenia Ore.
Wskazówka: *Zacznij od pokazania, że dla dowolnych zbiorów skończonych X i Y mamy $|X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y|$.*
Wskazówka: *Zastosuj poprzedni wzór do zbiorów $X = \{a - 1 : a \in A\}$ i $Y = B$.*

3 Drzewa

Zadanie 25

Załóżmy, że $G = (V, E)$ jest takim grafem prostym, że $|E| \geqslant |V|$. Pokaż, że graf G zawiera cykl.

Zadanie 26

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym. Załóżmy, że $v \in V$ jest wierzchołkiem o stopniu nieparzystym. Pokaż, że istnieje inny wierzchołek $u \in V$ o rzędzie nieparzystym od którego jest jakaś droga od v.
Wskazówka: *Zajmij się komponentą spójną grafu G do której należy wierzchołek v.*

Zadanie 27

Rozważmy następujący algorytm wyznaczania drzewa rozpinającego spójnego grafu $G = (V, E)$.

- Wybierzmy wierzchołek $a \in V$.
- Dla każdego $x \in V \setminus \{a\}$ wybieramy $y_x \in V$ taki, że $d(a, y_x) = d(a, x) - 1$ oraz, że w grafie G istnieje krawędź e_x od y_x do x

- Kładziemy $T = (V, \{e_x : x \in V \setminus \{a\}\})$

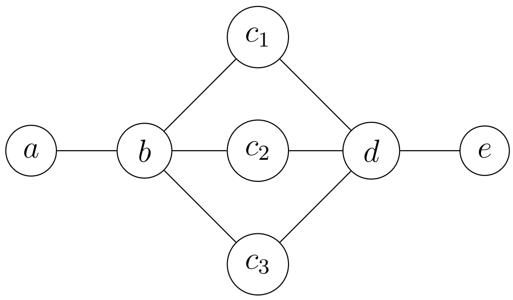
1. Sprawdź tę metodę na kilku przykładach.
2. Pokaż, że jest to poprawna metoda.
   Wskazówka: Aby pokazać poprawność tej metody przyjrzyj się drodze od a do x najkrótszej długości.
3. Pokaż, że graf T jest spójny
4. Pokaż, że T jest drzewem
   Wskazówka: Ile krawędzi ma graf T ?.

Zadanie 28

Wyznacz liczby wszystkich drzew o zbiorach wierzchołków $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ i $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Skorzystaj z serwisu ”The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences” do postawienia hipotezy o liczbie drzew o zbiorze wierzchołków $\{1, \ldots, n\}$.

Zadanie 29

1. Wyznacz wszystkie grafy rozpinające w następującym grafie:



   Wskazówka: W każdym grafie rozpinającym tego grafu musi być droga od a do e.
2. Uogólnij poprzedni punkt na podobny graf w którym zamiast trzech wierzchołków c_1, c_2, c_3 mamy n wierzchołków $c_1, \ldots, c_n$

Zadanie 30

Wyznacz drzewa rozpinające grafów C_n. Wyznacz kilka drzew rozpinających w grafach W_n, $K_{n,m}$. Spróbuj znaleźć w sieci dokładne wzory na liczbę drzew rozpinających w grafach K_n, W_n, $K_{n,m}$.

Zadanie 31

Niech $\tau(G)$ oznacza liczbę drzew rozpinających grafu spójnego G. Dla krawędzi e grafu G przez G/e rozumiemy kontrakcję grafu G wzdłuż krawędzi e: polega ona na sklejeniu końców krawędzi e w jeden wierzchołek. Dokładniej: jeśli $e = \{x, y\}$, to z grafu G usuwamy wierzchołki x i y, dodajemy nowy wierzchołek v_e i każdą krawędź postaci $\{x, u\}$ oraz $\{y, v\}$ zastępujemy krawędziami $\{v_e, u\}$ i $\{v_e, v\}$.

1. Pokaż, że $\tau(G) = \tau(G \setminus e) + \tau(G/e)$
2. Za pomocą tego wzoru oblicz $\tau(K_{2,4})$

Zadanie 32

POMIŃCIE TO ZADANIE: w oryginalnym sformułowaniu było ono oczywiście błędne; miałem na myśli coś innego - ale rozpiszę to później

Zadanie 33

Wyznacz liczbę grafów rozpinających w grafach $K_{2,n}$.

Zadanie 34

Niech $\tau(G)$ oznacza liczbę drzew rozpinających grafu spójnego G. Dla krawędzi e grafu G przez G/e rozumiemy kontrakcję grafu G wzdłuż krawędzi e: polega ona na sklejeniu końców krawędzi e w jeden wierzchołek. Dokładniej: jeśli $e = \{x, y\}$, to z grafu G usuwamy wierzchołki x i y, dodajemy nowy wierzchołek v_e i każdą krawędź postaci $\{x, u\}$ oraz $\{y, v\}$ zastępujemy krawędziami $\{v_e, u\}$ i $\{v_e, v\}$.

1. Pokaż, że $\tau(G) = \tau(G \setminus e) + \tau(G/e)$
2. Za pomocą tego wzoru oblicz $\tau(K_{2,4})$

Zadanie 35

Niech T będzie drzewem. Pokaż, że $\bar{d}(T) \leqslant 2$.

Zadanie 36

Ustalmy liczbę n. Rozważmy następującą dyskretną przestrzeń probabilistyczną:

1. zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór Ω wszystkich drzew o zbiorze wierzchołków $\{1, \ldots, n\}$.
2. dla $A \subseteq \Omega$ określamy
$$P_n(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Niech $L_n = \{T \in \Omega : \deg(n) = 1\}$ dla $n \geqslant 1$.

1. Wyznacz $P_n(L_n)$
   Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru Cayley'a.
   Wskazówka: Jeśli $\deg n = 1$ *to* n *jest liściem, więc po usunięciu go otrzymamy również drzewo.*
2. Oblicz $\lim_{n\to\infty} P_n(L_n)$

Zadanie 37

Pokaż, że $\delta(G) \leqslant \bar{d}(G) \leqslant \Delta(G)$ dla dowolnego grafu G.
Uwaga: $\bar{d}(G)$ oznacza średni stopień wierzchołka.

Zadanie 38

W dodatku A znajduje się kod prostej klasy języka Python implementującą graf prosty.

1. Dodaj do taj klasy metody służące do wyznaczania $\delta(G)$, $\bar{d}(G)$ oraz $\Delta(G)$
2. Dodaj do tej klasy metodę `ecc` która służy do obliczania ekscentryczności wierzchołka
3. Dodaj do tej klasy metodę służącą do wyznaczania promienia i średnicy grafu.

Zadanie 39

Do klasy z dodatku A dodaj metodę służącą do wyznaczania drzewa rozpinającego grafu.

4 Grafy planarne

Zadanie 40

Załóżmy, że graf G_1 jest pod-grafem grafu G_2 (czyli $V(G_1) \subseteq V(G_2)$ oraz $E(G_1) \subseteq E(G_2)$).

1. Pokaż, że jeśli G_2 jest planarny to i G_1 jest planarny
2. Pokaż, że jeśli G_1 nie jest planarny to i G_2 nie jest planarny

Zadanie 41

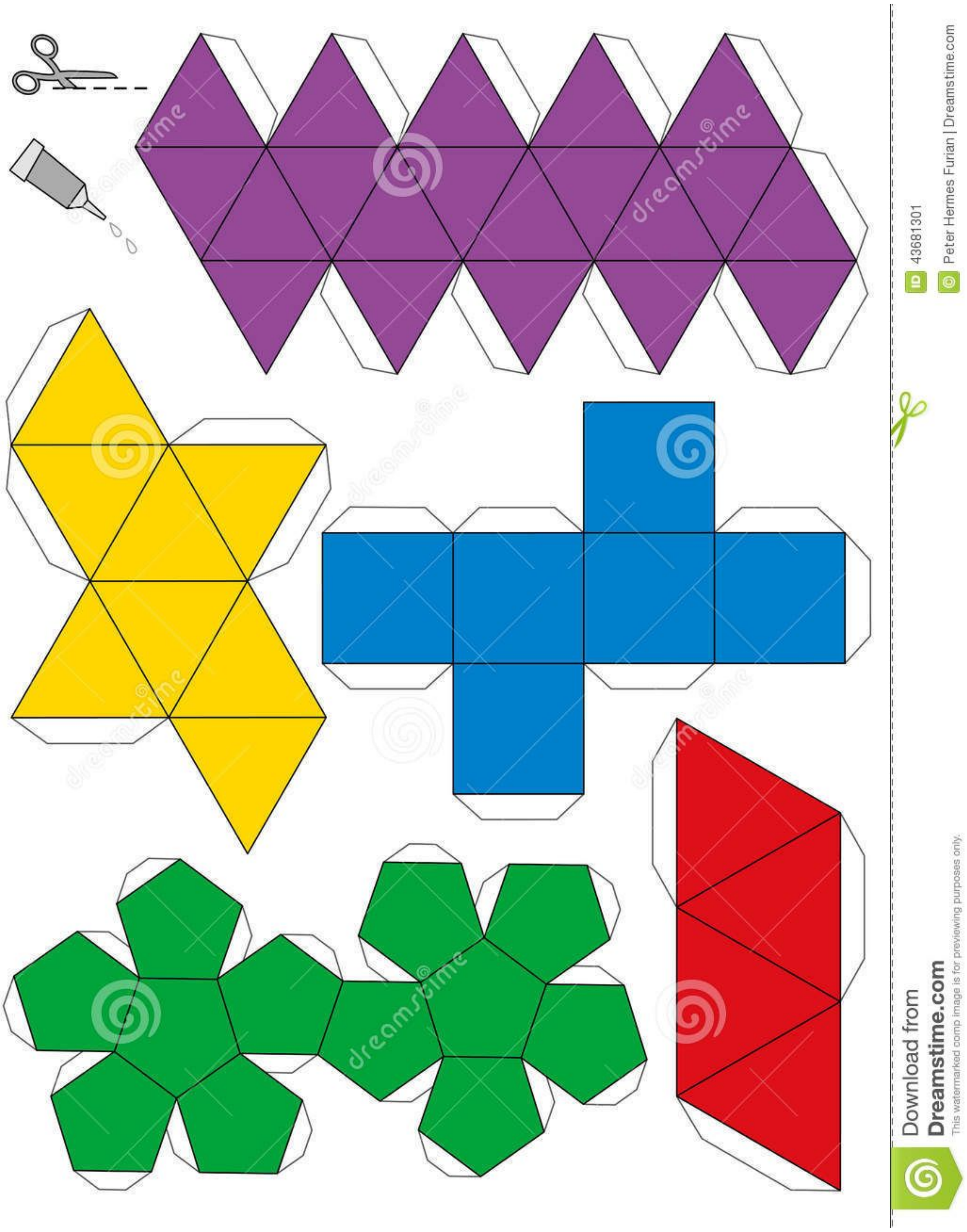
Dla jakich n hiper-kostki Q_n są planarne ?
Wskazówka: Pokaż, że jeśli $x, y, z \in Q_n$ i $d(x, y) = d(y, z) = 1$ to $x = z$ lub $d(x, z) = 2$.
Wskazówka: Pokaż, że w grafie Q_4 nie ma trójkątów i skorzystaj z przedostatniego twierdzenia z wykładu z dnia 01.04.2020.

Zadanie 42

Przedstaw grafy $K_{3,3}$ i K_5 jako grafy na płaszczyźnie z minimalną liczbą przecięć.

Zadanie 43 Zadanie świąteczne

Zaopatrz się w brystol, wytnij na podstawie następującego rysunku



szablony brył platońskich i sklej je.

Zadanie 44

Pokaż, że graf Petersena nie jest planarny.
Wskazówka: Usuń dwie "poziome" krawędzie i skorzystaj z twierdzenia Kuratowskiego.

Zadanie 45

Narysuj na płaszczyźnie graf Petersena tak aby na rysunku były tylko dwa przecięcia krawędzi.

Zadanie 46

Pokaż, że dowolny graf skończony jest izomorficzny z grafem którego wierzchołki są punktami przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zaś krawędzie są łukami w $\mathbb{R}^3$ łączącymi wierzchołki które nie mają przecięć poza (ewentulanie) punktami początkowymi lub końcowymi łuków.
Wskazówka: Umieśćmy punkty grafu na osi OX (czyli na zbiorze punktów $\{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$). Załóżmy, że rozważany graf ma m krawędzi. Ustalmy ciąg $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m < 2\pi$. Rozważmy wektory $\bar{v}_i = (0, \cos(\alpha_i), \sin(\alpha_i))$. Niech Π_i będzie płaszczyzną prostopadłą do wektora $\bar{v}_i$, czyli

$$\Pi_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y\cos(\alpha_i) + z\sin(\alpha_i) = 0\} \ .$$

Umieść i-tą krawędź na płaszczyźnie Π_i tak aby jedynymi punktami tej krawędzi z osią OX były końce krawędzi .

** Zadanie 47

Niech $P_k = (k, k^2, k^3)$. Pokaż, że umieszczając wierzchołki grafu prostego w punktach $P_1, \ldots, P_n$ można go narysować bez przecięć tak, że każda krawędź jest odcinkiem.
Wskazówka: Równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ i $C = (x_3, y_3, z_3)$ jest dane równaniem

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Przypomnij sobie również pojęcie wyznacznika Vandermonda.

Zadanie 48

Pokaż, że każde drzewo jest planarne.
Wskazówka: To jest proste ćwiczenie na indukcję matematyczną; indukcję zrób po liczbie wierzchołków.

5 Spójność

Przypomnienie oznaczeń:

- $\delta(G) = \min\{\deg(x) : x \in V(G)\}$
- $\kappa(G) = \min\{|X| : X \subset V(G) \land G \setminus X$ nie jest spójny$\}$ lub $|V(G)| - 1$ jeśli nie ma takiego zbioru X
- $\lambda(G) = \min\{|Y| : Y \subset E(G) \land G \setminus Y$ nie jest spójny$\}$

Zadanie 49

Wyznacz liczby $\kappa(G)$, $\lambda(G)$ i $\delta(G)$ dla grafów K_n, L_n oraz W_n (dla wszystkich n).

Zadanie 50

Pokaż, że dla dowolnego spójnego grafu prostego mamy $\lambda(G) \leqslant \delta(G)$.

Zadanie 51

Podaj przykład spójnego grafu prostego G dla którego $\kappa(G) < \lambda(G) < \delta(G)$.

Zadanie 52

Załóżmy, że $\lambda(G) = k > 0$. Pokaż, że jest rozbicie $\{U, V\}$ zbioru wierzchołków grafu G takie, że jest dokładnie k krawędzi z jednym końcem w zbiorze U i drugim w zbiorze V.

Zadanie 53

Wyznacz liczby $\kappa(K_{n,m})$ i $\lambda(K_{n,m})$ dla dowolnych $n, m \geqslant 1$.
Wskazówka: *Możesz skorzystać z twierdzenia Mengera dla odpowiednio zmodyfikowanego grafu $K_{n,m}$.*

Zadanie 54

Załóżmy, że graf G jest k-spójny (czyli $|V(G)| > k$ oraz żaden zbiór wierzchołków X taki, że $|X| < k$ nie rozpójnia grafu G. Niech x będzie jakimś elementem spoza $V(G)$ oraz niech $A \subseteq V(G)$ będzie zbiorem mocy k. Rozważmy graf

$$G' = (V(G) \cup \{x\}, E(G) \cup \{\{x, a\} : a \in A\}) \ .$$

Pokaż, że graf G' jest również k-spójny.

Zadanie 55

Niech G będzie spójnym grafem w którym wszystkie wierzchołki maja rząd parzysty. Pokaż, że $\lambda(G) \geqslant 2$ (czyli, że usunięcie dowolnej krawędzi nie rozspójnia grafu.
Wskazówka: *Użyj jednego z twierdzeń Eulera.*

Zadanie 56

Załóżmy, że graf G jest k-spójny (czyli $|V(G)| > k$ oraz żaden zbiór wierzchołków X taki, że $|X| < k$ nie rozpójnia grafu G. Niech x będzie jakimś elementem spoza $V(G)$ oraz niech $A \subseteq V(G)$ będzie zbiorem mocy k. Rozważmy graf

$$G' = (V(G) \cup \{x\}, E(G) \cup \{\{x, a\} : a \in A\}) \ .$$

Pokaż, że graf G' jest również k-spójny.

5.1 Skojarzenia

Zadanie 57

Podzielmy w dowolny sposób talię 52 kart na 13 grup po 4 karty. Pokaż, że z każdej z tych grup można wybrać po jednej karcie w taki sposób aby otrzymać zestaw 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, W, K, D, A (nie ważne jakiego koloru).
Wskazówka: *Wymodeluj ten problem za pomocą grafu dwudzielnego. Jeden ze zbiorów rozbicia użyj do reprezentowania grup a drugi do rodzaju karty. Pokaż następnie, że do tego grafu możesz zastosować twierdzenie Hall'a.*

Zadanie 58

Pokaż, że drzewo może mieć co najwyżej jedno doskonałe skojarzenie.
Wskazówka: Zastosuj indukcję. W kroku indukcyjnym przyjrzyj się liściowi; usuń go, wraz z wierzchołkiem incydentnym i zastosuj założenie indukcyjne do drzew składających się z otrzymanego lasu.

Zadanie 59 Twierdzenie Waerdena

Niech $|S| = n \cdot m$. Niech $\{A_1, \ldots, A_n\}$ i $\{B_1, \ldots, B_n\}$ będą rozbiciami zbioru S na zbiory mocy m. Pokaż, że istnieją parami różne $a_1, \ldots, a_n$ oraz permutacja ϕ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ takie, że

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\})(a_i \in A_i \cap B_{\pi(i)|}) \ .$$

Wskazówka: Zdefiniuj graf dwudzielny o rozbiciu $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ o krawędziach

$$E = \{\{x_i, y_j\} : A_i \cap B_j \neq \emptyset\} \ ,$$

pokaż, że spełnia on założenia twierdzenia Hall'a i następnie zastosuj to twierdzenie .

Zadanie 60 Twierdzenie Erdős–Szekeres'a

Załóżmy, że $m, n \geqslant 2$ są liczbami naturalnymi. Niech $k = (m-1)(n-1) + 1$.

1. Pokaż, że w każdym ciągu liczb rzeczywistych długości k istnieje podciąg $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ taki, że $x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_m}$ lub istnieje podciąg $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$ taki, że $x_{j_1} \geqslant x_{j_2} \geqslant \ldots \geqslant x_{j_n}$.
   Wskazówka: Zdefiniuj częściowy porządek na zbiorze $\{1, \ldots, k\}$ wzorem
   $$i \prec j = (i < j) \wedge (x_i < x_j)$$
   i zastosuj do niego twierdzenie Dilwortha .
2. Podaj przykład różnowartościowego ciągu długości $(3-1)(3-1)$ bez malejących ani rosnących podciągów długości 3
3. Podaj przykład różnowartościowego ciągu długości $(5-1)(5-1)$ bez malejących ani rosnących podciągów długości 5

Zadanie 61 Kombinatoryczna wersja twierdzenia Hall'a

Niech $S = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ bedzie ciągiem zbiorów. Transwersalą tego ciągu zbiorów nazywamy ciąg $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ parami różnych elementów taki, że $s_i \in S_i$ dla każdego $i = 1, \ldots, m$. Pokaż, że rodzina S ma transwersalę wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall T \subseteq \{1, \ldots, m\})(|\bigcup_{t \in T} S_t| \geqslant |T|) \ .$$

Wskazówka: Zbuduj odpowiedni graf dwudzielny.

Zadanie 62 Twierdzenie König'a o małżeństwach

Pokaż, że każdy dwudzielny i regularny graf ma doskonałe skojarzenie.
Wskazówka: Załóżmy, że $G = G(X, Y)$ oraz, że graf jest r - regularny ($r \geqslant 1$). Niech $E[Z] = \{e \in E(G) : Z \cap e \neq \emptyset\}$ dla dowolnego zbioru wierzchołków Z. Pokaż, że (1) dla dowolnego $A \subseteq X$ mamy $E[A] = r|A|$, (2) $E[A] \subseteq E[\mathcal{N}(A)]$ (3) $B \subseteq Y$ mamy $E[B] = r|B|$ i następnie połącz te fakty.

Zadanie 63

Grupa złożona ze 100 studentów ma uczestniczyć w egzaminach ustnych. Zespół egzaminacyjny składa się z 25 osób. Każdy student ma być przepytany przez jedną osobę z zespołu egzaminacyjnego. Wiadomo, że każdy ma co najmniej 10 ulubionych osób. Pokaż, że można ustawić sesję egzaminacyjną tak, aby (1) każdy student przepytany był przez ulubioną przez niego osobę (2) każdy egzaminator przepyta co najwyżej 10 studentów.
Wskazówka: *Zamiast rozważać 25 osobową komisję rozważ zbiór 250 slotów czasowych (po dziesięć slotów dla każdego członka komisji).*

Zadanie 64

Niech $G = G(X, Y)$ będzie grafem dwudzielnym takim, że $|X| = |Y| = n$ oraz $\delta(G) \geqslant \frac{1}{2}n$. Pokaż, że graf G ma doskonałe skojarzenie.
Wskazówka: *Rozważ oddzielnie dwa przypadki dla $A \subseteq X$: (1) $|A| \leqslant \frac{1}{2}n$ (2) $|A| > \frac{1}{2}n$.*

Zadanie 65

Pewna obca rasa ma trzy płcie: męską, żeńską i ooloi. Małżeństwo w tej rasie składa się z trzech osób, po jednej z każdej płci, które lubią się nawzajem. Każda osoba może należeć do co najwyżej jednego (potrójnego) małżeństwa. Specyficzną cechą tej rasy jest to, że uczucia są zawsze wzajemne - jeśli x lubi y, to wtedy y lubi x.

Rasa ta wysyła wyprawę w celu kolonizacji planety. Wyprawa ma n mężczyzn, n kobiet i n ooloi. Wiadomo, że każdy członek wyprawy lubi co najmniej k osób z obu pozostałych płci.

Pokaż, że jeśli $k \geqslant \frac{3}{4}n$, to zawsze można utworzyć n rozłącznego trójek małżeńskich, żeniąc w ten sposób wszystkich członków wyprawy.
Wskazówka: *Ożeń najpierw mężczyzn z kobietami a potem ożenione dwójki ożeń z ooloiami. W drugiej części rozumowania skorzystaj z równości $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.*

Zadanie 66 Problem haremu

Załóżmy, że każdy dziewczyna ze zbioru D chce poślubić pewną liczbę ukochanych (tzn. dla każdego $d \in D$ mamy określą liczbę $x_d \geqslant 1$ wymaganych małżonków). Każdy chłopiec może poślubić co najwyżej jedną dziewczynę. Sformułuj warunek konieczny i wystarczający na to aby problem haremu miał rozwiązanie.
Wskazówka: *Zastąp każdą dziewczynę odpowiednią liczbą jej klonów.*

Zadanie 67

Niech $X_{m,n} = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ $(n, m \geqslant 1)$. Na zbiorze określamy relację wzorem

$$(x, y) \preceq (x', y') \leftrightarrow (x \leqslant x') \wedge (y \leqslant y')$$

Wyznacz największą moc antyłańcucha w częściowym porządku $(X_{m,n}, \preceq)$.

Zadanie 68

Wysokością częściowego porządku $\mathcal{P} = (X, \preceq)$ nazywamy największą długość łańcucha w $\mathcal{P}$. Liczbę tę oznaczamy przez $height(\mathcal{P})$. **Szerokością** $\mathcal{P}$ nazywamy moc największego antyłańcucha w $\mathcal{P}$. Liczbę tę oznaczamy przez $width(\mathcal{P})$.

1. Pokaż, że jeśli $|X| > m \cdot n$ to $height(\mathcal{P}) \geqslant m + 1$ lub $width(\mathcal{P}) \geqslant n + 1$.
2. Niech $|X| = n$. Pokaż, że $height(\mathcal{P}) \geqslant \left\lfloor \sqrt{n-1} \right\rfloor + 1$ lub $width(\mathcal{P}) \geqslant \left\lfloor \sqrt{n-1} \right\rfloor + 1$

Zadanie 69

Niech $X \subseteq \mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ będzie zbiorem o co najmniej 5 elementach. Pokaż, że istnieją w nim trzy liczby $x < y < z$ takie $x|y$ i $y|z$ lub istnieje trójka liczb $x < y < z$ które nie dzielą się nawzajem.

Zadanie 70

Niech $\mathcal{P} = (\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+, \preceq)$, gdzie

$$(x, y) \preceq (a, b) \leftrightarrow ((x \leqslant a) \land (y \leqslant b)) \ .$$

1. Pokaż, że porządek $\mathcal{P}$ nie ma nieskończonych antyłańcuchów.
   Wskazówka: Załóż, że A jest nieskończonym antyłańcuchem. Zauważ, że jeśli $(a_1, b_1) \in A$, $(a_2, b_2) \in A$ oraz $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ to $a_1 \neq a_2$. Wywnioskuj z tego, że zbiór $\{a : (\exists b)(a, b) \in A\}$ jest nieskończony.
2. Pokaż, że porządku $\mathcal{P}$ nie można rozbić na skończenie wiele łańcuchów.
   Wskazówka: Zauważ, że jeśli L jest łańcuchem oraz A jest antyłańcuchem to $|A \cap L| \leqslant 1$. Popatrz na zbiór $\{(n, 1), (n - 1, 2), \ldots, (2, n - 1), (1, n)\}$.

Zadanie 71

Ustalmy liczbę naturalną N. Znajdź w częściowym porządku $(\{1, 2, \ldots, N\}, |)$ (symbol $|$ oznacza relację podzielności) łańcuch o największej długości.

Zadanie 72 Dualne twierdzenie Dilworth'a

Niech $\mathcal{P} = (X, \preceq)$ będzie skończonym częściowym porządkiem.

1. Niech $L \subseteq X$ będzie łańcuchem w $\mathcal{P}$. Niech $\mathcal{A}$ będzie rozbiciem X na antyłańcuchy. Pokaż, że $|L| \leqslant |\mathcal{A}|$.
   Wskazówka: Zauważ, że jeśli L jest łańcuchem oraz A jest antyłańcuchem to $|A \cap L| \leqslant 1$.
2. Dla $x \in X$ definiujemy liczbę $N(x)$ jako największą długość łańcucha w $\mathcal{P}$ którego największym elementem jest x. Pokaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n zbiór $N^{-1}(\{n\})$ jest antyłańcuchem w $\mathcal{P}$.
3. (Twierdzenie Mirsky'ego - czyli dualne twierdzenie Dilworth'a) Pokaż, że $height(\mathcal{P})$ jest równa mocy najmniejszego rozbicia $\mathcal{P}$ na antyłańcuchy.

Zadanie 73

Ustalmy liczbę naturalną N. Znajdź rozbicie częściowego porządku $(\{1, 2, \ldots, N\}, |)$ o najmniejszej mocy na antyłańcuchy.

6 Grafy skierowane

Zadanie 74

Niech $G = (\{0, \ldots, 19\}, E)$, gdzie $E = \{(k, (k^2 + 1) \mod 20) : k = 0, \ldots, 19\}$. Wyznacz silne komponenty spójne grafu G oraz zredukowany graf acykliczny grafu G.

Zadanie 75

Niech G będzie zorientowanym grafem acyklicznym o n wierzchołkach. Pokaż, że graf ten ma co najwyżej $\binom{n}{2}$ krawędzi. Podaj przykład takiego grafu o dokładnie $\binom{n}{2}$ krawędziach.

Zadanie 76 Sortowanie topologiczne

Niech G będzie zorientowanym grafem acyklicznym. Pokaż, że można znaleźć taką numerację $(v_1, \ldots, v_n)$ wierzchołków grafu G, że jeśli $(v_i, v_j) \in E$ to $i < j$.

Zadanie 77

Digraf (graf skierowany) jest **digrafem prostym** jeśli nie ma on krawędzi wielokrotnych an pętli. Ile jest digrafów prostych o wierzchołkach $\{v_1, \ldots, v_n\}$? Ile jest turniei na zbiorze $\{v_1, \ldots, v_n\}$?

Zadanie 78

Niech G będzie grafem prostym o n wierzchołkach i m krawędziach.

1. Pokaż, że jeśli G jest spójny to $n - 1 \leqslant m \leqslant n(n-1)$.
2. Pokaż, że jeśli G jest silnie spójny to $n \leqslant m \leqslant n(n-1)$.

Zadanie 79

Graf prosty nazywamy **orientowalnym** jeśli jego krawędzie można zorientować tak aby otrzymany digraf był silnie spójny.

1. Pokaż, że każdy graf hamiltonowski jest orientowalny.
2. Dla jakich n grafy K_n są orientowalne? Dla każdego n dla którego K_n jest orientowalny wskaż taką orientację.
3. Dla jakich m, n grafy $K_{m,n}$ są orientowalne? Dla każdej pary n, m dlaktórj graf $K_{m,n}$ jest orientowalny wskaż taką orientację.

6.1 Sieci i potoki

Zadanie 80

Wyznacz w następującej sieci

$$\begin{tikzcd}
4 \arrow[r, "7"] & 5 \arrow[r, "8"] & t \\
s \arrow[u, "6"] \arrow[r, "5"] & 1 \arrow[u, "4"] \arrow[r, "2"] & 2 \arrow[u, "2"']
\end{tikzcd}$$

największy potok i minimalne cięcie

Zadanie 81

Załóżmy, że f, g są pseudo-potokami w digrafie (V, E) z dwoma wyróżnionymi wierzchołkami s, t (czyli: $f, g : E \to \mathbb{R}$ oraz dla dowolnego $x \in V \setminus \{x, y\}$ mamy $out_f(x) = in_f(x)$ oraz $out_g(x) = in_g(x)$. Pokaż, że $f + g$ jest również pseudo-potokiem.

Zadanie 82

Załóżmy, że f, g są potokami w sieci (V, E, s, t, c). Niech $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Pokaż, że $\alpha \cdot f + (1-\alpha)g$ jest również potokiem w tej sieci.

Zadanie 83

Niech $\mathcal{P} = x_0 e_1 x_1 e_1 \ldots x_{n-1} e_n x_n$ $(s = x_0,\ x_n = t)$ będzie ścieżką f-powiększającą. Niech

$$\delta_i = \begin{cases} c(e_i) - f(e_i) & : \phi(e_i) = (x_{i-1}, x_i) \\ f(e_i) & : \phi(e_i) = (x_i, x_{i-1}) \end{cases}$$

oraz $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Definiujemy funkcję $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Dla $e \notin \{e_1, \ldots, e_n\}$ kładziemy $g(e) = 0$. Jeśli $\phi(e_i) = (x_{i-1}, x_i)$ to kładziemy $g(e_i) = \delta$. Jeśli zaś $\phi(e_i) = (x_i, x_{i-1})$ to kładziemy $g(e_i) = -\delta$.

1. Pokaż, że g jest pseudo-potokiem.
2. Pokaż, że $f + g$ jest potokiem.

Zadanie 84

Wyprowadź twierdzenie Mengera z twierdzenia Forda-Fulkersona.

1. Pokaż jak korzystając z dowolnego algorytmu służącego do wyznaczania maksymalnego przepływu (np. z algorytmu Edmontona - Karpa) możesz wyznaczyć (s,t)-separator o minimalnej mocy w grafie skierowanym.
2. Pokaż jak korzystając z dowolnego algorytmu służącego do wyznaczania maksymalnego przepływu możesz wyznaczyć (s,t)-konektor ścieżkowo rozłączny o maksymalnej mocy w grafie skierowanym.

Zadanie 85

Wyprowadź twierdzenie Hall'a z twierdzenia Forda-Fulkersona.

Zadanie 86

Wyprowadź twierdzenie Forda-Fulkersona dla całkowito-liczbowej funkcji ograniczeń $c \in \mathbb{N}^E$.

Wskazówka: *Każdą krawędź e od x do y taką, że $c(e) > 0$ zastąp $c(e)$ kopiami krawędzi od x do y i do tak otrzymanego grafu zastosuj twierdzenie Mengera.*

Zadanie 87

Wyprowadź twierdzenie Forda-Fulkersona dla funkcji ograniczeń $c \in \mathbb{Q}^E$ z twierdzenia Forda-Fulkersona dla funkcji ograniczeń $c \in \mathbb{N}^E$

Wskazówka: *Pomnóż ograniczenia przez taką liczbę całkowitą aby otrzymać ograniczenie całkowito-liczbowe.*

Zadanie 88

Wyprowadź twierdzenie Forda-Fulkersona dla funkcji ograniczeń $c \in \mathbb{R}^E$ z twierdzenia Forda-Fulkersona dla funkcji ograniczeń $c \in \mathbb{Q}^E$.

Wskazówka: *Niech c_n będzie aproksymacją funkcji c wymiernymi taką, że $0 \leqslant c_n(e) \leqslant c(e)$ oraz $c(e) - c_n(e) \leqslant \frac{1}{n}$ dla dowolnej krawędzie $e \in E$. Dla każdego n znajdź potok f_n i cięcie X_n takie, że $||f_n|| = c(X_n, X_n^c)$. Teraz pokaż, że jest nieskończony podciąg $n_1 < n_2 < \ldots$*

oraz pewien zbiór X taki, że (1) dla każdej krawędzi $e \in E$ ciąg $f_{n_k}(e)$ jest zbieżny (2) dla każdego k mamy $X_{n_k} = X$.

Zadanie 89

Ustalmy sieć (V, E, s, t, c). Niech $m = \sup\{||f|| : f \text{ jest potokiem}\}$. Pokaż, że $\{||f|| : f \text{ jest potokiem}\} = [0, m]$.
Wskazówka: Łatwa część: $[0, m) \subseteq \{||f|| : f \text{ jest potokiem}\}$. Trochę bardziej wyrafinowane jest pokazanie, że $m \in \{||f|| : f \text{ jest potokiem}\}$. Można to zrobić tak: bierzemy ciąg potoków (f_n) taki, że $\lim_n ||f_n|| = m$. Podobnie jak w poprzednim zadaniu pokazujemy, że jest nieskończony podciąg $n_1 < n_2 < \ldots$ taki że dla każdej krawędzi $e \in E$ ciąg $f_{n_k}(e)$ jest zbieżny. Definiujemy $f^*(e) = \lim_k f_{n_k}(e)$. Pozostaje do pokazania, że f^* jest potokiem .

Zadanie 90 ”Problem obiadu”

Kilka rodzin wychodzi razem na obiad. Aby zwiększyć interakcję społeczną, chcieliby usiąść przy stolikach tak aby żaden z członków tej samej rodziny nie siedział przy tym samym stole. Załóżmy, że na obiad przyszło p rodzin oraz że i-ta rodzina ma $a(i)$ osób. Załóżmy również, że dostępne jest q stołów oraz że przy j-tym stole można posadzić $b(k)$ osób.

Pokaż, jak można rozwiązać problem istnienia rozwiązania tego problemu oraz wyznaczenia jego (jeśli istnieje) za pomocą wyznaczenia maksymalnego przepływu odpowiednio skonstruowanej sieci.

Zadanie 91

Jaka jest maksymalna moc rodziny (s, t)-ścieżek krawędziowo rozłącznych w grafie Q_n, gdzie $s = (0, 0, \ldots, 0)$ i $t = (1, 1, \ldots, 1)$. Wskaż taką rodzinę.

7 Kolorowanie

Zadanie 92

Pokaż, że $\chi(C_{2n+1}) = 3$ oraz $\chi(C_{2n}) = n$.

Zadanie 93

Pokaż, że jeśli T jest drzewem, to $\chi(T) = 2$.

Zadanie 94

Niech $\alpha(G)$ oznacza moc największego niezależnego podzbioru zbioru wierzchołków grafu G. Pokaż, że $\chi(G) \leqslant \frac{|V|}{\alpha(G)}$.

Zadanie 95

Niech $\omega(G)$ oznacza moc największej kliki w grafie G, czyli

$$\omega(G) = \max\{|X| : [X]^2 \subseteq E\}.$$

1. Pokaż, że $\chi(G) \geqslant \omega(G)$.

2. Znajdź graf G taki, że $\omega(G) = 2$ zaś $\chi(G) \geqslant 10$.

* Zadanie 96

Pokaż, że dla dowolnego grafu prostego G istnieje takie uporządkowanie $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ zbioru wierzchołków, że wynikiem kolorowania zachłannego grafu G kontrolowanego ciągiem $\vec{v}$ jest liczba $\chi(G)$.

Zadanie 97

Załóżmy, że chcemy zaplanować egzaminy dla wszystkich studentów kierunku informatyka oraz, że chcemy wykorzystać minimalną liczbę godzin zajęcia sal (złóżmy, dla uproszczenia, że każdy egzamin ma trwać jedną godzinę). Jedynym ograniczeniem jest to, że dwa egzaminy nie mogą być planowane jednocześnie, jeśli jakiś student musi uczestniczyć w obu egzaminach. Zinterpretuj godziny w których odbywać się mają egzaminy jako kolory.

1. Pokaż (a raczej zauważ), że problem minimalizacji zużytych godzin sprowadza się do problemu kolorowania grafu minimalną liczbą kolorów.
2. Podaj kilka innych naturalnych przykładów związku problemu kolorowania grafów z problemami planowania.

Zadanie 98

Zaimplementuj jako metodę klasy SimpleGraph z końca tej listy zadań procedurę zachłannego kolorowanie. Spróbuj zaproponować jakąś rozsądną procedurę wyboru uporządkowania wierzchołków.

Zadanie 99

Wyznacz wielomiany chromatyczne grafów C_n, P_n, K_n, $K_{2,n}$.

Zadanie 100

Pokaż, że jeśli T jest drzewem o n wierzchołkach to $\chi(T)(x) = x(x-1)^{n-1}$.

1. Znając ten wzór uzasadnij dlaczego $\chi(T) = 2$.
2. Podaj interpretację równości $\chi(T)(2) = 2$ oraz znajdź możliwie prosty kombinatoryczny argument uzasadniający tę równość.

A Simple Graph

Prosty kod w języku Python implementujący graf prosty. Krawędzie są implementowane za pomocą słownika, którego kluczami są wierzchołki zaś wartościami są listy sąsiadów, np.

Listing 1: klasa SimpleGraph i przykład użycia

```
class SimpleGraph(object):

    def __init__(self):
        self.vertex_nbh = {}
```

```
    def vertices(self):
        """ zwraca wierzcholki grafu """
        return list(self.vertex_nbh.keys())

    def edges(self):
        """ zwraca krawedzie grafu """
        edges = []
        for x in self.vertex_nbh:
            for y in self.vertex_nbh[x]:
                if {y, x} not in edges:
                    edges.append({x, y})
        return edges

    def add_vertex(self, x):
        """ Jesli "vertex" nie jest w self.vertex_nbh to
            klucz "vertex" z pusta lista sasiadow jest dodany
            do slownika.
            W przeciwnym przypadku nic sie nie dzieje.
        """
        if x not in self.vertex_nbh:
            self.vertex_nbh[x] = []

    def _add_edge(self, x, y):
        if x in self.vertex_nbh:
            if y not in self.vertex_nbh[x]:
                self.vertex_nbh[x].append(y)
        else:
            self.vertex_nbh[x] = [y]

    def add_edge(self, x, y):
        self._add_edge(x, y)
        self._add_edge(y, x)

    def neighbors(self, v):
        return self.vertex_nbh[v]

if __name__ == "__main__":

    graph = SimpleGraph()
    graph.add_edge("a", "b")
    graph.add_edge("a", "c")
    graph.add_edge("a", "d")
    graph.add_edge("b", "a")
    graph.add_edge("c", "a")
    graph.add_edge("c", "d")
    graph.add_edge("d", "a")
    graph.add_edge("d", "c")
    graph.add_edge("d", "e")
```

```python
graph.add_vertex("f")

print("Vertices of graph:")
print(graph.vertices())

print("Edges of graph:")
print(graph.edges())
```

Powodzenia
Jacek Cichoń