E1 $\models ((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$

przechodniość implikacji

D-d (szkic) kiedy to może być fałszywe

$((\ ) \land (\ )) \equiv 1$; $(p \to r) \equiv 0$

$p \equiv 1$, $r \equiv 0$

$(p \to q) \equiv 1 \land (q \to r) \equiv 1$

$q \equiv 1$

$r \equiv 1$

sprzeczność

WN: $\models ((p \Leftrightarrow q) \land (q \Leftrightarrow r)) \to (p \Leftrightarrow r)$

F2. $\boxed{\models (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)}$ $\boxed{\text{roz. nie wprost}}$

czyli

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$$

D-d.

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$\underbrace{\neg q}_{\alpha} \rightarrow \underbrace{\neg p}_{\beta} \equiv \alpha \rightarrow \beta \equiv \neg \alpha \vee \beta \equiv \neg\neg q \vee \neg p$$

$$\equiv \neg p \vee q$$

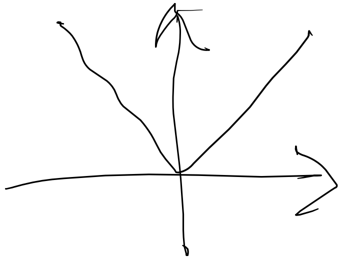
p $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$; $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$

$x \in \mathbb{Q} \rightarrow x^2 \neq 2$ $x = \frac{p}{q}$; $NWD(p,q) = 1$ $x^2 = 2 \rightarrow x \notin \mathbb{Q}$

$x = \sqrt{2} \equiv x^2 = 2 \rightarrow x \notin \mathbb{Q}$ $2 = \frac{p^2}{q^2}$; $2q^2 = p^2$; $2|p$; $p = 2p_1$ ...

F3 : $\models \left[(p \to q) \wedge (\neg p \to q) \right] \to q$

(P) $|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$



$y = |x|$

FAKT: $\boxed{x \leq |x|}$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

$$\left[(\forall x \in \mathbb{R})(x \leq |x|) \right]$$

$p =$ "$x \geq 0$" $\quad q =$ "$x \leq |x|$"

(1) $p \to q$: Zał. że $x \geq 0$. wtedy $|x| = x$, $|x| \geq x$ □

(2) $\neg p \to q$; Zał. że $x < 0$; $x < 0 \leq |x|$ □

SYNTEZA FORMUŁ

Szukamy takiego φ:

P	Q	R	ϕ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$(000)_2 = 0$

$(001)_2 = 1$

$(010)_2 = 2$

$(\quad)_2 = 3$

$(\quad)_2 = 4$

$(\quad)_2 = 2^3 - 1 = 7$

$\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3$

$8 = 2^3$

P	Q	R	ϕ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

P	Q	R	ϕ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

P	Q	R	ϕ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$\varphi_1 = (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\varphi_2 = (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

$\varphi_3 = (p \wedge \neg q \wedge r)$

$$\varphi = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

Literał : zmienna lub negacja zmiennej.

φ jest w postaci dyzjunkcyjnej normalnej $\boxed{\text{DNF}}$

$\varphi = F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_k$; F_i - konj. literałów.

WNIOSEK. Dla zdania φ istnieje ψ w post. DYZJ - NORM t. że

$$\varphi \equiv \psi.$$

DYGRESJA: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

$$\neg(p \vee q \vee r) \equiv \neg(p \vee (q \vee r)) \equiv \neg p \wedge \neg(q \vee r)$$

$$\equiv \neg p \wedge (\neg q \wedge \neg r) \equiv \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$$

$$\neg \bigvee_{i=1}^{n} p_i \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} (\neg p_i) \qquad \neg \bigwedge_{i=1}^{n} p_i \equiv \bigvee_{i=1}^{n} (\neg p_i)$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} p_i \stackrel{def}{=} p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \leftarrow \text{wygodny skrót}$$

weźmy φ (dowolne)

$$\neg\varphi \equiv \bigvee_{i=1}^{k} F_i \quad , \quad F_i = \bigwedge_{j=1}^{r} L_{ij}$$

↑ literały

$$\equiv \bigvee_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=1}^{r} L_{ij}$$

$$\varphi \equiv \neg\neg\varphi \equiv \neg(\neg\varphi) \equiv \neg\left(\bigvee_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=1}^{r} L_{ij}\right) \equiv$$

$$\equiv \bigwedge_{i=1}^{k} \neg \bigwedge_{j=1}^{r} L_{ij} \equiv \bigwedge_{i=1}^{k} \bigvee_{j=1}^{r} \underbrace{\neg L_{ij}}_{\text{literał}}$$

klauzule

koniunkcyjna normalna

CNF

Postać ~~koniunkcyjna normalna~~ CNF

$\varphi \equiv C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$,

gdzie C_i są klauzulami, czyli

$C_i = (\pm p_{i,1} \vee \pm p_{i,2} \vee \ldots \vee \pm p_{i,r})$

$+p = p$

$-p = \neg p$

p

$(\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg r \vee q) \wedge (p \vee q)$

P

$$\varphi = (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee p \vee r)$$

Q - ? $\models \varphi$??

$\pi \not\models \varphi$

$\equiv$

$\pi \models C_1$ & $\pi \models C_2$ & ... & $\pi \models C_4$

trywialne programistycznie

$\pi \not\models C_4$ dowolne π

$$\varphi \approx [[\neg p, q, r], [p, \neg q, r], [\neg p, \neg q, \neg r], [\neg p, p, r]]$$

$\pi \models C_1 \equiv$? $\pi(p) = 1$, $\pi(q) = 0$, $\pi(r) = 0$

NIE

CZAS: n^3 ; n - długość $\tilde{\varphi}$

Q: φ – CNF $\qquad \varphi = (p \vee \neg q \vee r) \wedge \wedge \ldots$

Czy istnieje π t. że

$\pi \models \varphi$?

NAIWNE: 1) wyznacz wszyst. zmienne zdaniowe:

$p_1, \ldots, p_K$

2) zbadaj wszystkie waluacje $\pi : \{p_1 \ldots p_K\} \to \{0, 1\}$

$val(\varphi, \pi)$

3) ile potrzebuje czasu $C \cdot 2^K$

P_ K ≈ 100

$$2^{100} \approx 10^{33}$$

Czas rzeczywisty : 1 doba 86500 sek

$\approx 10^{5}$ sek

częst. 10^{10} sek^{-1}

$$\text{doba} \approx 10^{5} \cdot 10^{10} = 10^{15}$$

Ile dni : $\dfrac{10^{33}}{10^{15}} = 10^{18}$ dni

$$\approx \frac{10^{18}}{400} \approx \frac{1}{4} \cdot 10^{16} \text{ lat}$$

$\boxed{\text{WIEK WSZECHŚW.} \approx 12 \cdot 10^{9} \text{ lat}}$

Pytanie:

Czy istnieje algorytm A który:

$\underset{CNF}{\xrightarrow{\varphi}} \boxed{A} \to 1/0$

1) dla φ typu CNF

$$A(\varphi)=1 \equiv (\exists \pi)(\pi \models \varphi)$$

2) liczba kroków wynosi L_φ

$$L_\varphi \le C \cdot \|\varphi\|^K$$

dla C, K niezal. od φ?

$P = NP$

polynomial

nondeterministic polynomial

10^6 \$ Nagroda Milenijna