ZBIORY

$\in$ = symbol należenia

$a \in A \equiv$

a jest elementem A

Aksjomat ekstensjonalności

zbiory A i B są równe $(A = B)$ iff

dla dowolnego x mamy

$$x \in A \longleftrightarrow x \in B$$

$\Downarrow$ - jasne

zasada Leibnitz'a

zbiór pusty : zbiór bez żadnych elementów,

czyli : E jest zb. pustym,

jeśli zdanie $x \in E$ jest

fałszywe dla dowolnego x

Wniosek. Istnieje dokł. jeden zbiór pusty.

D-d. Zał. że E_1, E_2 są zbiorami pustymi.

weźmy dowolny x:

1. $x \in E_1 \equiv \perp$
2. $x \in E_2 \equiv \perp$

więc

$$x \in E_1 \longleftrightarrow x \in E_2$$

więc z (AE) mamy $E_1 = E_2$ $\boxtimes$

aksj. ekstensjonalności

OZNACZENIE: $\emptyset$ ← zbiór pusty

DEF. Niech Ω będzie ustalonym zbiorem

Przyporządkowanie : $\omega \in \Omega \longrightarrow \varphi(\omega)$

o wartościach 1, 0 nazywamy <u>FUNKCJĄ</u>

<u>ZDANIOWĄ na Ω</u>

P $\Omega = \mathbb{N}$; $\varphi(x) =$ "$2 | x$".

P $\Omega = \mathbb{R}$; $\varphi(x) =$ "$1 < x \wedge x \leq 2$"

<u>Konstrukcja wyróżniania</u> : Ω, φ

$$\omega \in \{x \in \Omega : \varphi(x)\} \equiv \omega \in \Omega \wedge \varphi(\omega)$$

PI

$\{x \in \mathbb{N} : 2 | x\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ ← parzyste

$= \{2 \cdot k : k \in \mathbb{N}\}$

PII

$\{x \in \mathbb{R} : 1 < x \wedge x \leq 2\} = (1, 2]$

$A = \{\omega \in \Omega : \varphi(\omega)\}$

UWAGA: konst. wyr. jest poprawnie określona

$$\omega \in \{x \in \Omega : \varphi(x)\} \equiv \omega \in \Omega \wedge \varphi(\omega)$$

Załóżmy, że
$$\omega \in C_1 \equiv \omega \in \Omega \wedge \varphi(\omega) \leftarrow (*_1)$$
$$\omega \in C_2 \equiv \omega \in \Omega \wedge \varphi(\omega) \leftarrow$$

wtedy: dla dowolnego ω:

$$\omega \in C_1 \equiv (*_1) \equiv \omega \in C_2$$

z (AE): $C_1 = C_2$.

Tw (Russell) Nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów

D-d. Zał. że V jest takie, że dla dowolnego zbioru X mamy $X \in V$. Niech

$$A = \{x \in V : \neg(x \in x)\}.$$

wtedy

$$A \in A \longleftrightarrow \underbrace{A \in V}_{1} \wedge \neg(A \in A) \longleftrightarrow \neg(A \in A)$$

sprzeczność

1905 ← Paradoks Russell'a.

Def. (para nieuporządkowana):

$$\boxed{x \in \{a, b\} \equiv (x = a \vee x = b)}$$

CZYLI: parę nieup. elem a, b nazywamy taki C, że dla dowolnego x mamy

$$x \in C \equiv (x = a \vee x = b).$$

Zadanie: Pok. popr. tej konstrukcji.

(P) $x \in \{\phi, \phi\} \leftrightarrow x = \phi \vee x = \phi \leftrightarrow x \in \phi.$

$x \in \{a, a\} \leftrightarrow x = a$; $\{a\} = \{a, a\}$

singleton

$x \in \{\emptyset\} \longleftrightarrow x = \emptyset$

$\emptyset \in \{\emptyset\}$; więc $\underline{\{\emptyset\} \neq \emptyset}$

$a \in \{a\}$

- $\{\{\emptyset\}\} \ni \{\emptyset\}$

  $\{\{\emptyset\}\} \neq \emptyset$

- ¿ $\{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$?

wat. ie tak :

- $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
- $\{\emptyset\} \notin \{\emptyset\}$;

bo gdyby $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

to $\{\emptyset\} = \emptyset$

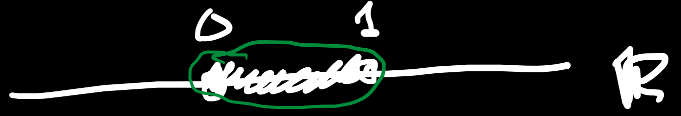
sprz.

- $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots$

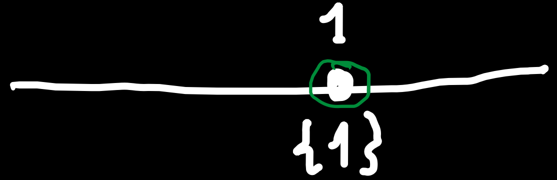
są parami różne.

$$\boxed{x \in \{a\} \equiv x = a}$$

P



$[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$



$\{1\} = [1,1]$

DEF (suma) $x \in A \cup B \equiv x \in A \vee x \in B$

CZYLI: sumą zbiorów A i B nazywamy taki zbiór C, że dla dowolnego x mamy

$$x \in C \longleftrightarrow x \in A \vee x \in B.$$

DEF (przekrój) $x \in A \cap B \equiv x \in A \wedge x \in B.$

FAKT: $A \cup B = B \cup A$ (przem. sumy)

D-d. Weźmy dowolne x. Wtedy

$$x \in A \cup B \overset{def}{\longleftrightarrow} \underbrace{x \in A}_{p} \vee \underbrace{x \in B}_{q} \overset{\models}{\longleftrightarrow} x \in B \vee x \in A \underset{def}{\longleftrightarrow} x \in B \cup A \quad \blacksquare$$

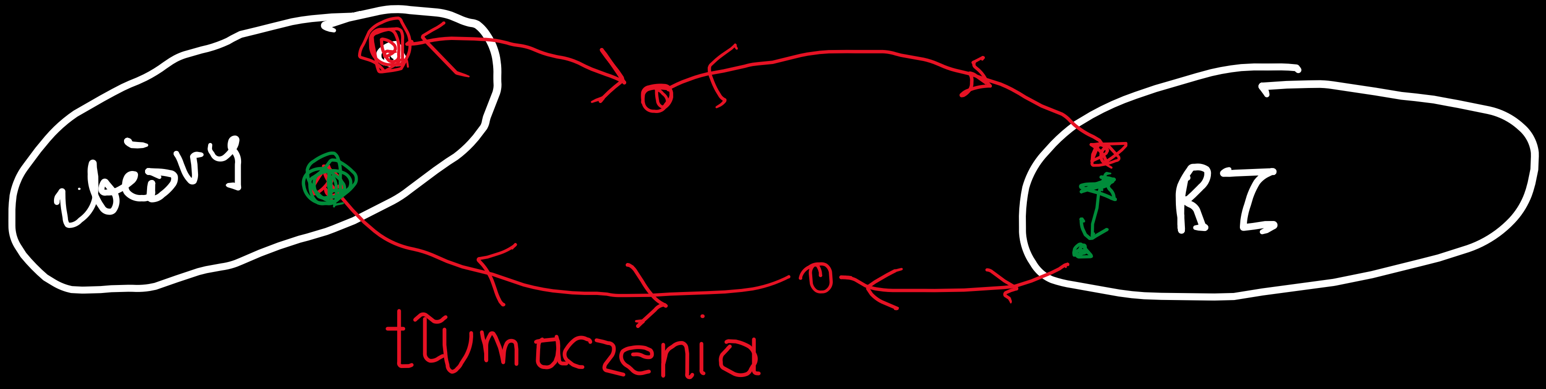
$\models (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

(P) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$$x \in A \cup (B \cup C) \overset{def}{\longleftrightarrow} x \in A \vee x \in B \cup C \overset{def}{\longleftrightarrow}$$

$$\underbrace{x \in A}_{p} \vee (\underbrace{x \in B}_{q} \vee \underbrace{x \in C}_{r}) \overset{E}{\longleftrightarrow} (\underbrace{x \in A}_{p} \vee \underbrace{x \in B}_{q}) \vee \underbrace{x \in C}_{r}$$

$$\underset{def}{\longleftrightarrow} (x \in A \cup B) \vee x \in C \underset{def}{\longleftrightarrow} x \in (A \cup B) \cup C \quad \blacksquare$$



$\underset{o}{Z} \models (p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$ $\underset{o}{Z}$

Metoda 0-1

lub coś mądrzejszego

F. $A \cup A = A$

$A \cap A = A$

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cup C)$

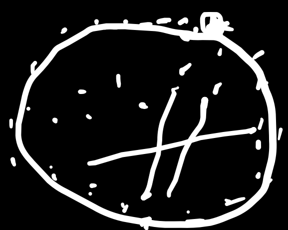
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$: $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

⋮

$\models (p \vee p) \leftrightarrow p$

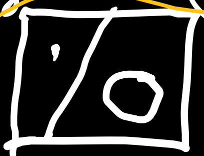
$\models (p \wedge p) \leftrightarrow p$

geom. rzutowa



dys-ku-sja

kryptografia



Kartezjusz: geometria $\cong$ geom. analit.

dygresja

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \end{cases}$$

DEF. (zawieranie)

$$\boxed{A \subseteq B \text{ iff dla dowolnego } x \text{ mamy } x \in A \longrightarrow x \in B.}$$

UWAGA:

$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \equiv$ dla każdego x mamy

$x \in A \longrightarrow x \in B$

i

$x \in B \longrightarrow x \in A$

$\equiv$ dla każdego x mamy

$x \in A \longleftrightarrow x \in B$

(AE) $\boxed{(A = B) \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)}$.

FAKT: $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \to (A \subseteq C)$.

<u>D-d</u>. Zał. że (1) $A \subseteq B$

i (2) $B \subseteq C$.

Weźmy dowolne x. Zał. że $x \in A$.

z (1) wynika, że $x \in B$.

z (2) wynika, że $x \in C$.

Czyli $x \in A \to x \in C$.

zatem $A \subseteq C$ ∎

Tw. 1) $A \subseteq B$

2) $A \cap B = A$

3) $A \cup B = B$

$\models (p \wedge q \rightarrow p)$

D-d

$(1) \rightarrow (2)$. Zał. że $A \subseteq B$.

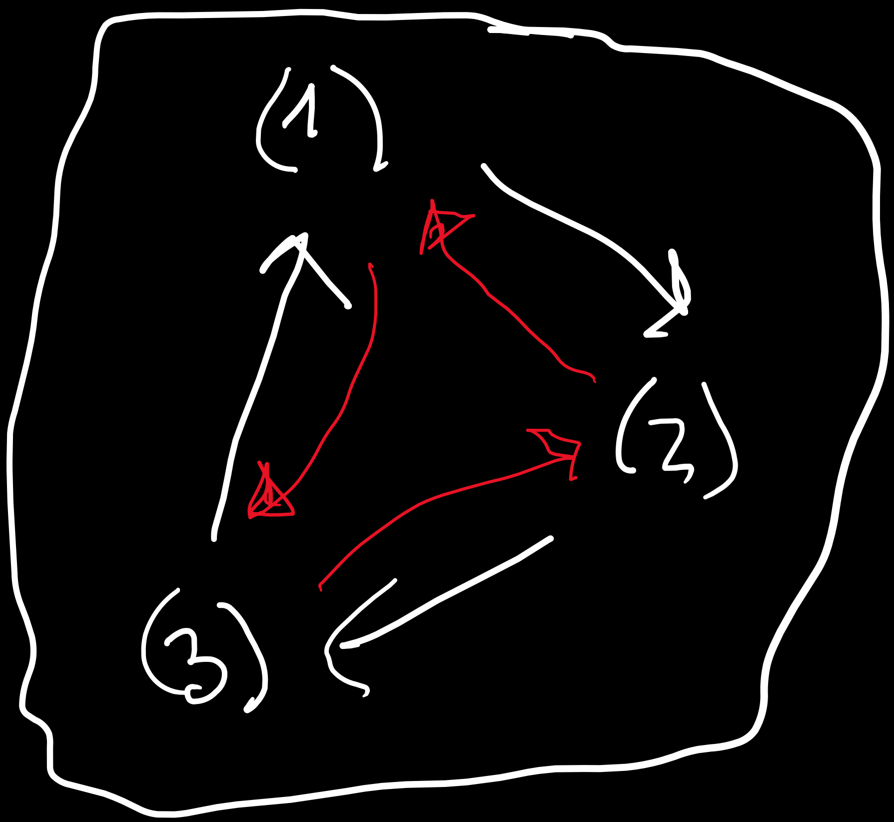
- $x \in A \cap B \equiv x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$

$A \cap B \subseteq A$

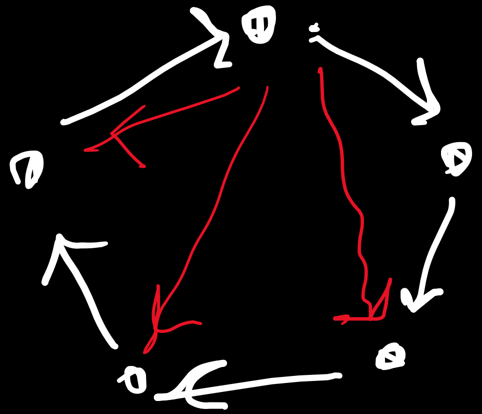
- $x \in A$; z zał. $x \in B$; więc $x \in A \cap B$

więc $A \subseteq A \cap B$

$$\left.\begin{array}{l}(2) \rightarrow (3) \\ (3) \rightarrow (1)\end{array}\right\} \text{ w czwartek}$$



$$\big((3) \to (1) \land (1) \to (2)\big) \to \big((3) \to (2)\big)$$



Dyskusja o schemacie rozumowania