INKLUZJA (ZAWIERANIE)

$A \subseteq B \equiv$ dla dowolnego x:

$$x \in A \to x \in B$$

F1. $\begin{cases} A \subseteq A \cup B \\ A \cap B \subseteq A \end{cases}$

D-d. weźmy dowolny x.
Załóżmy, że $x \in A$.
wtedy $x \in A \vee x \in B$.
więc $x \in A \cup B$ ■

sin — przyprostokątna
całka — integral
pochodna — derivative
cursor, kursor } migotek

$\models (p \to p \vee q)$

$\models (p \wedge q \to p)$

F2. Zał. że $A \subseteq B$ i $C \subseteq D$. Wtedy

1) $A \cup C \subseteq B \cup D$
2) $A \cap C \subseteq B \cap D$

$$\begin{array}{c} A \subseteq B \\ C \subseteq D \\ \hline A \cup C \subseteq B \cup D \end{array} \quad \Big\downarrow \cup$$

D-d. Zał. że $x \in A \cup C$.
Wtedy $x \in A$ lub $x \in C$.

P1 $x \in A$; z zał. mamy $x \in B$; wtedy $x \in B \cup D$

P2 $x \in C$; z zał. mamy $x \in D$; wtedy $x \in D \cup B = B \cup D$.

F3. Dla dowolnych A, B

1) $A \subseteq B$
2) $A \cap B = A$
3) $A \cup B = B$

D-d. Wiemy, że $(1) \to (2)$.

$(2) \to (3)$ Zał. że $A \cap B = A$

$$B \subseteq A \cup B = (A \cap B) \cup B \subseteq B \cup B = B$$

$$B \subseteq A \cup B$$
$$A \cup B \subseteq B$$

z (AE) $A \cup B = B$ ■

$$\begin{array}{rl} A \cap B & \subseteq B \\ B & \subseteq B \\ \hline (A \cap B) \cup B & \subseteq B \cup B \end{array} \quad \Big\downarrow \cup$$

$(3) \to (1)$

Zał. że $A \cup B = B$.

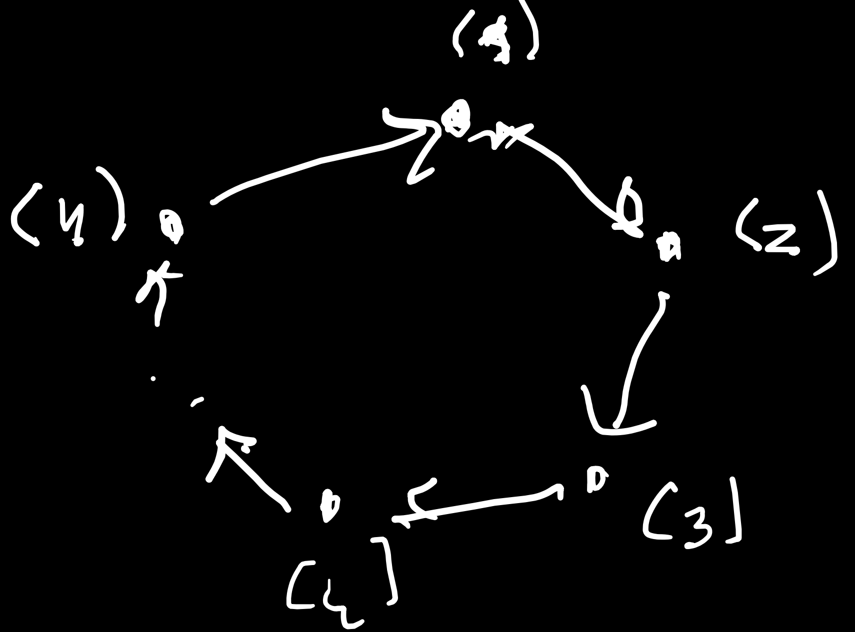
Zał. że $\underline{x \in A}$.

Wtedy, również, $x \in A \cup B$.

(bo $A \subseteq A \cup B$).

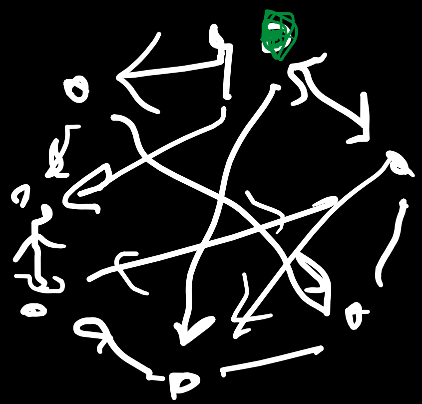
Z zał. mamy $\underline{x \in B}$ ■

Schemat rozumowania



n - rozumowań

$\Longrightarrow$



$(1) \equiv (2) \equiv (3) \equiv \ldots (n)$

$n(n-1)$ rozumowań

Dla $n = 5$: $\quad 5 \div 20$

Def. $x \in A \setminus B \equiv x \in A \wedge \underbrace{\neg(x \in B)}_{x \notin B}$ skrót

różnica zbiorów

obserwacja: $A \setminus B = \{x \in A : \neg(x \in B)\}$

Def (dopełnienie zbioru) Ustalmy Ω. Dla $A \subseteq \Omega$ określamy: $\boxed{A^c = \Omega \setminus A}$.

c = compliment

$A^{c,\Omega}$

Uwaga: (1) dla $x \in \Omega$ mamy

$$x \in A^c \equiv x \notin A$$

(jeśli $x \notin \Omega$, to $x \in A^c$ jest fałszywe)

(2) Jeśli $A, B \subseteq \Omega$ to

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

FAKT. Załóżmy, że $A, B \subseteq \Omega$. Wtedy

(1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$\Big\}$ prawa de Morgana

ZADANIE: udowodnić (2)

D-d. Załóżmy, że $x \in \Omega$. Wtedy

$$x \in (A \cup B)^c \equiv \neg(x \in A \cup B) \equiv \neg(x \in A \vee x \in B) \overset{*}{\equiv}$$

$$\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \equiv x \in A^c \wedge x \in B^c \equiv x \in A^c \cap B^c \;\blacksquare$$

P $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cap C^c = (A \cap B^c) \cap C^c =$

$= A \cap (B^c \cap C^c) = A \cap (B \cup C)^c = A \setminus (B \cup C)$

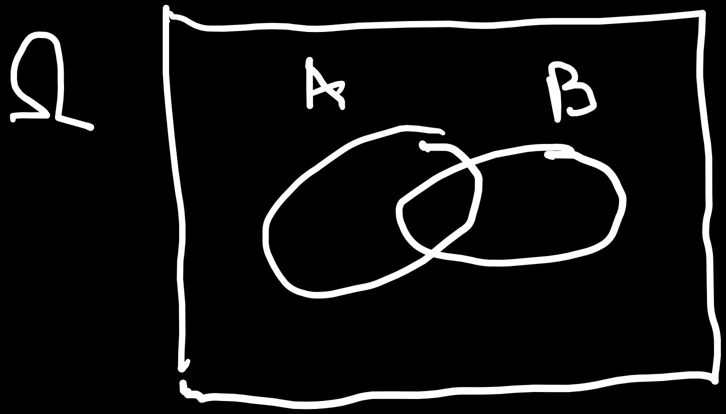
uogólnienie

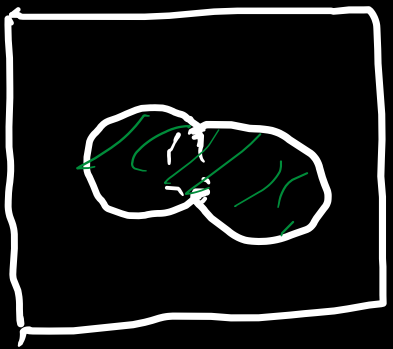
$(((A \setminus B_1) \setminus B_2) \setminus B_3) \setminus B_4 = A \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n)$

Q $(A \setminus (B \setminus C)) = \ldots = ?$

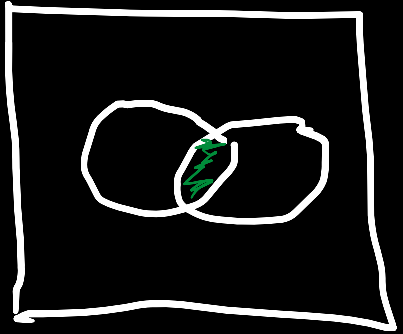
$A \setminus B \rightsquigarrow A \cap B^c$

Diagramy Venna.

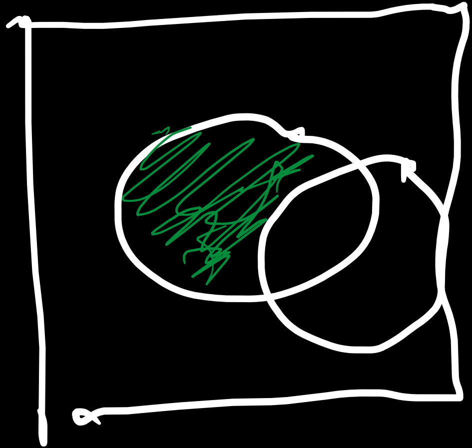




$A \cup B$

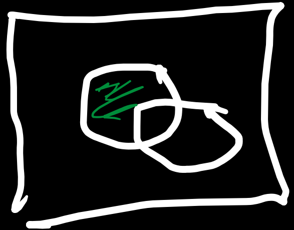


$A \cap B$

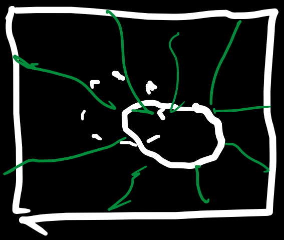


$A \setminus B$

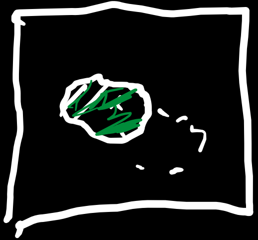
$A \setminus B = A \cap B^c$



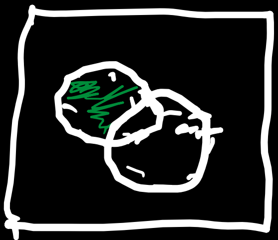
$A \setminus B$



B^c

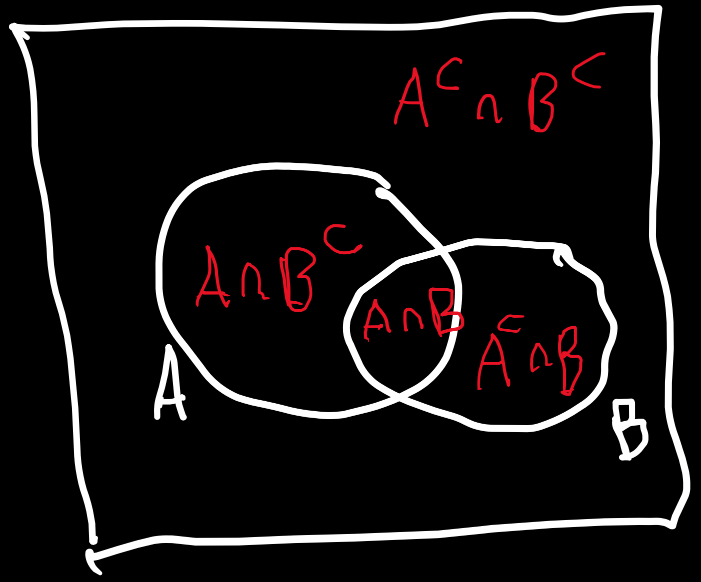


A



$A \cap B^c$

Poprawny diagram

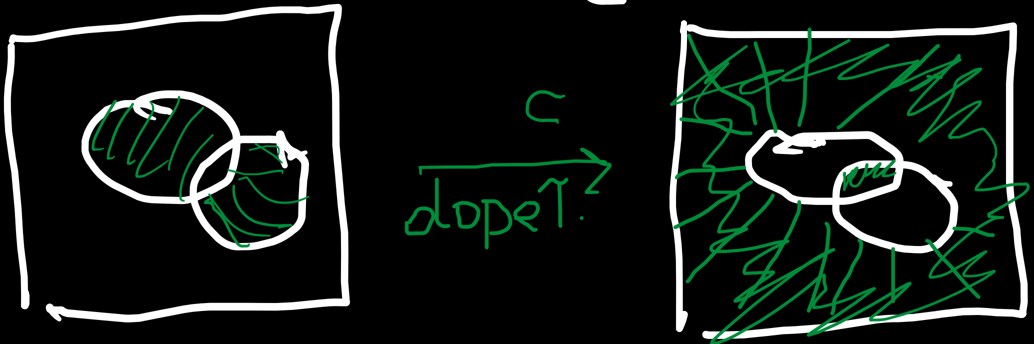


$\mathcal{S} = \{A \cap B,\ A \cap B^c,\ A^c \cap B,\ A^c \cap B^c\}$

składowe rodziny $\{A, B\}$

wszystkie składowe są niepuste

Q: Co możemy zrobić z $\mathcal{S}$ za pomocą $\cup, \cap, {}^c$



co mogę zrobić za pomocą $\cup$?

- $\emptyset$, Ω
- $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ $\quad 2^4 = 16$

$B = \dots\dots$

$C \Leftarrow$ otrzymane z A, B za pomocą $\cap, \cup, {}^c$

$x \in \Omega$

$$C = \Big(\underbrace{(A \cup A)}_{A} \cap (B \cap A^c)\Big) \cup \underbrace{(B \cap B^c)}_{\emptyset}$$

$$x \in C \equiv \varphi(p, q)$$

$p =$ "$x \in A$"

$q =$ "$x \in B$"

p	q	$\varphi(p,q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

$$\varphi \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

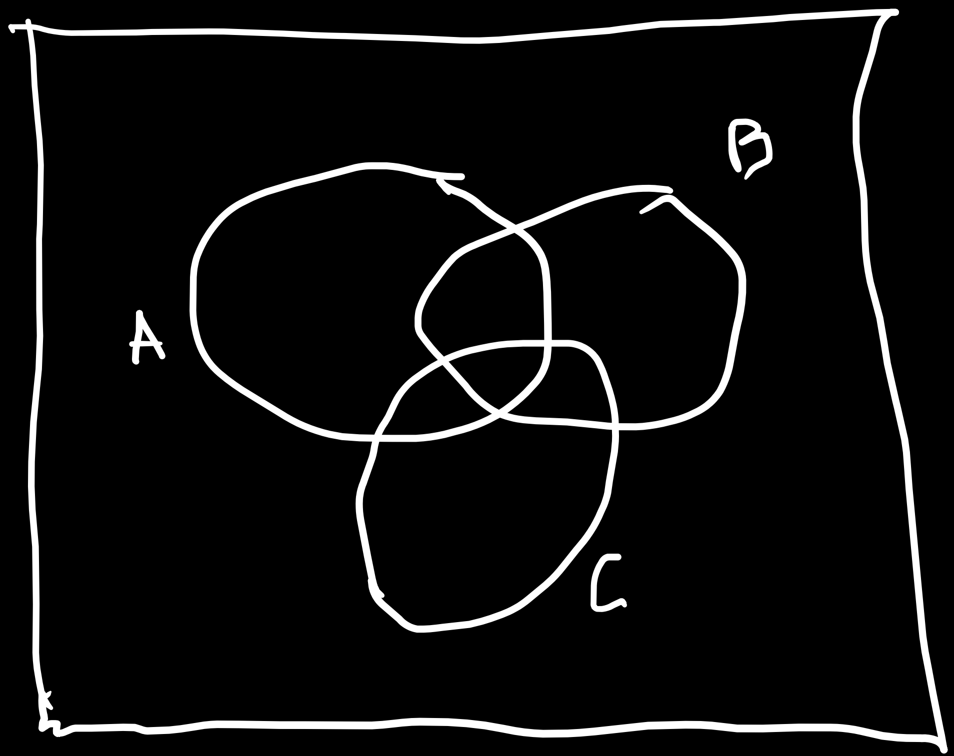
DNF

$$\equiv (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge \neg x \in B)$$

$$\equiv x \in A \cap B \vee x \in A \cap B^c; \quad C = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

składowe

Dla $n = 3$: $A, B, C \subseteq \Omega$



składowe:

$A^{\varepsilon_1} \cap B^{\varepsilon_2} \cap C^{\varepsilon_3}$,

$\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$

$X^1 = X$, $X^{-1} = X^c$

$A \cap B^c \cap C^c$, $A^c \cap B \cap C^c$, ...

$\mathcal{S}$ – wszystkie składowe;

$\#\mathcal{S} = 2^3$ $(= 8)$

$\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_8\}$

Co możemy zrobić z $\mathcal{S}$:

$(\cup, \cap, {}^c)$: $2^8 = 256$

Ogólny przypadek:

mamy $A_1, \ldots, A_n$.

składowe: $A_1^{\varepsilon_1} \wedge \ldots \wedge A_n^{\varepsilon_n}$

: tego mamy 2^n

$$\boxed{2^{(2^n)}}$$

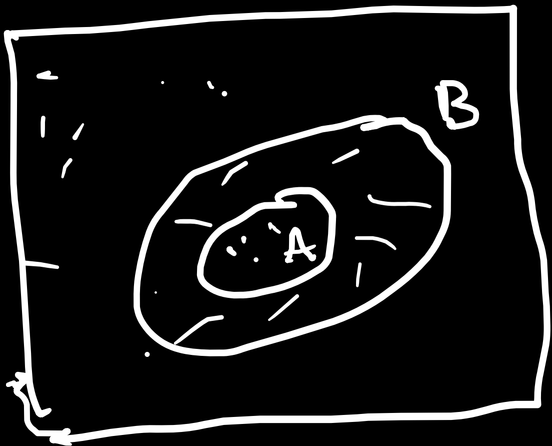
z tego możemy wyprodukować

zdania

(P) $n = 10$: $2^{(2^{10})} = 2^{1024} \approx 10^{333}$

$10^{80} \approx$ liczba atomów we wszechświecie

P



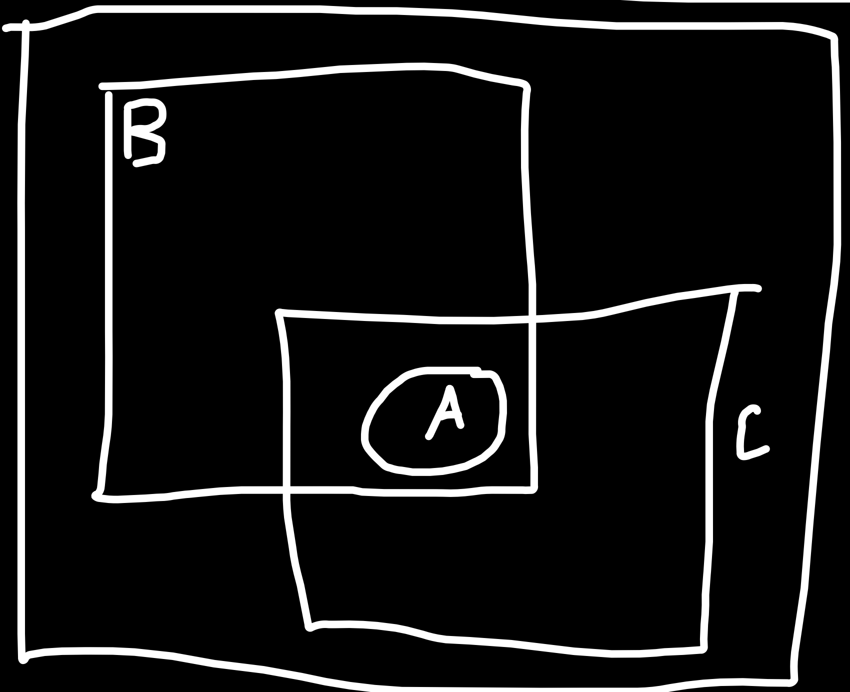
$\mathcal{S} = \{A, A^c \cap B, B^c\}$

ile mogę wypr. zbiorów za pomocą $\cap, \cup, {}^c$?

2^3 (= tyle mamy rozb. $\mathcal{S}$)

$= 8.$

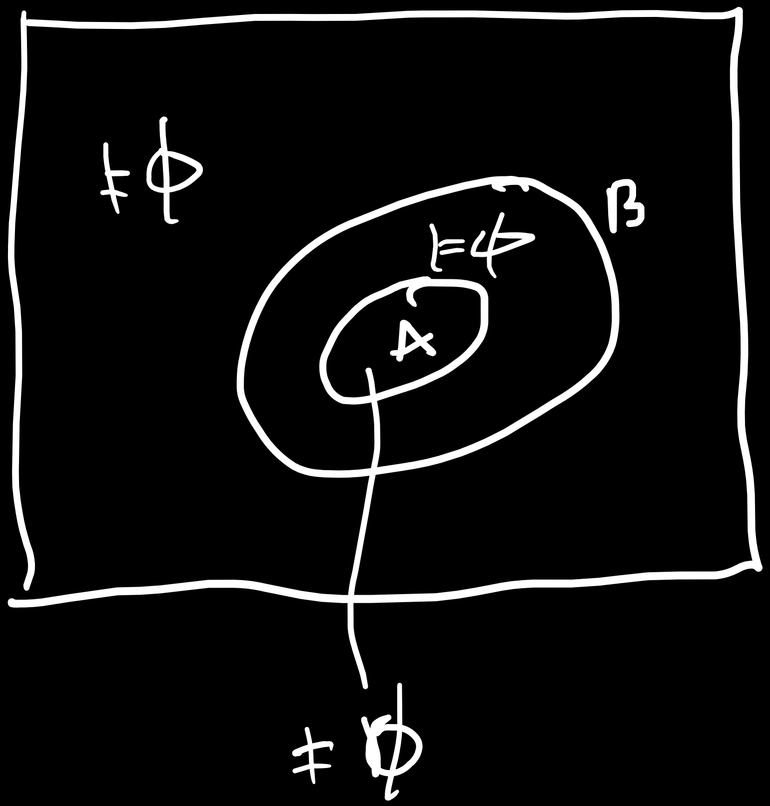
Ω



$\leftarrow A \cap B^c \cap C^c = \emptyset$

Po wykładzie

Załóż, że $A \subseteq B$. Pokaż, że ...



$$A^{\varepsilon_1} \cap B^{\varepsilon_2}$$

$\varepsilon_i \in \{1, c\}$

$A^1 = A$

$A \cap B^c = \emptyset$ pusta składowa