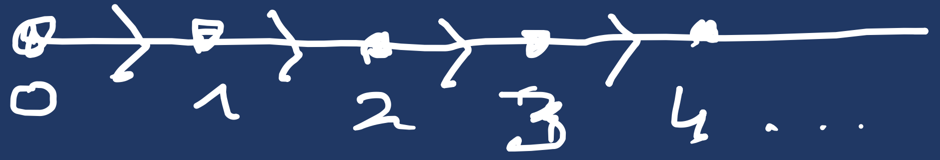
Relacje

1) $R\circ(S\circ T) = (R\circ S)\circ T$

2) $(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$

P $\quad R = \{(n, n+1) : n\in\mathbb{N}\}$



$(x,z)\in R\circ R \equiv$

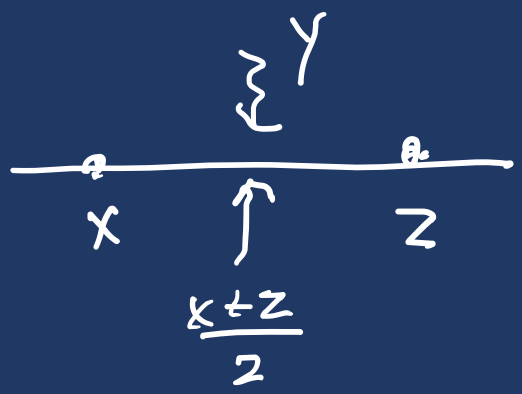
$(\exists y)((x,y)\in R \wedge (y,z)\in R) \equiv (z = x+2)\wedge x\in\mathbb{N}$

P $N = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<y\}$

$$(x,z)\in N\circ N \equiv (\exists y)\big((x,y)\in N \wedge (y,z)\in N\big)$$

$$\equiv (\exists y)(x<y \wedge y<z)$$

$$\equiv x<z$$



$$N\circ N = N$$

R jest relacją $\equiv (\exists X)(R \subseteq X \times X)$

UWAGA: $\left.\begin{array}{l} R \subseteq X \times X \\ Y \supseteq X \end{array}\right\} \to X \times X \subseteq Y \times Y$

$$\Downarrow$$

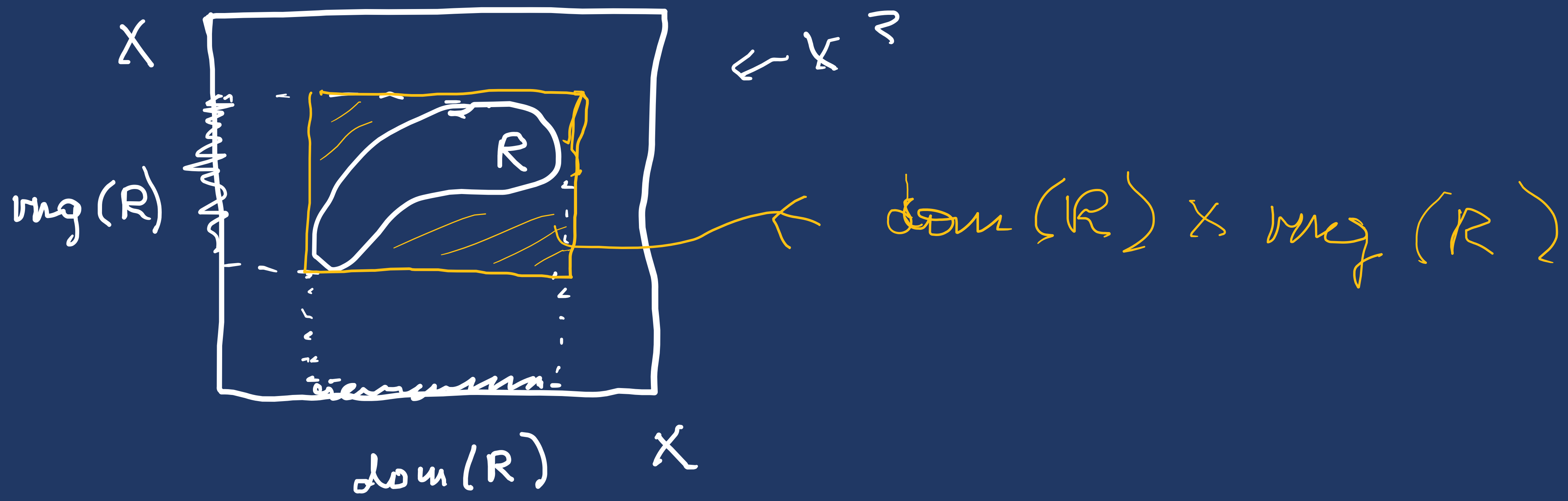
$$R \subseteq Y \times Y$$

Def. Zał. że R jest relacją.

1) $\mathrm{dom}(R) = \{ x : (\exists y)((x,y) \in R) \}$ dziedzina

2) $\mathrm{rng}(R) = \{ y : (\exists x)((x,y) \in R) \}$ obraz

Wn. $R \subseteq \mathrm{dom}(R) \times \mathrm{rng}(R)$



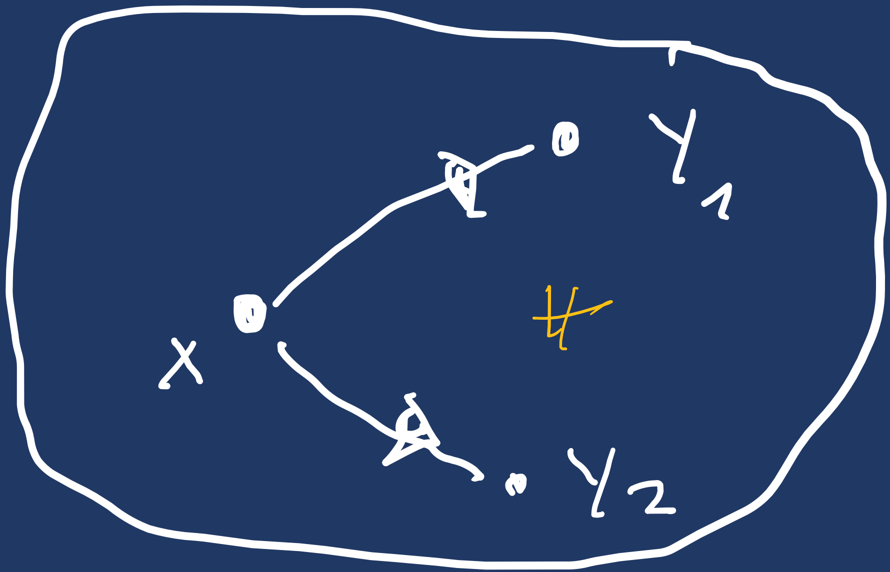
FUNKCJE.

Def. Relacja F jest funkcją jeśli

!!! (*): $(\forall x)(\forall y_1, y_2)\Big(\big((x,y_1)\in F \wedge (x,y_2)\in F\big)\to y_1=y_2\Big)$

$$\neg(*) \equiv \neg(\forall x)(\forall y_1, y_2)\big(\underbrace{((x,y_1)\in F \wedge (x,y_2)\in F)}_{p} \to \underbrace{y_1 = y_2}_{q}\big)$$

$$\equiv (\exists x)(\exists y_1, y_2)\big((x,y_1)\in F \wedge (x,y_2)\in F \wedge y_1 \neq y_2\big)$$

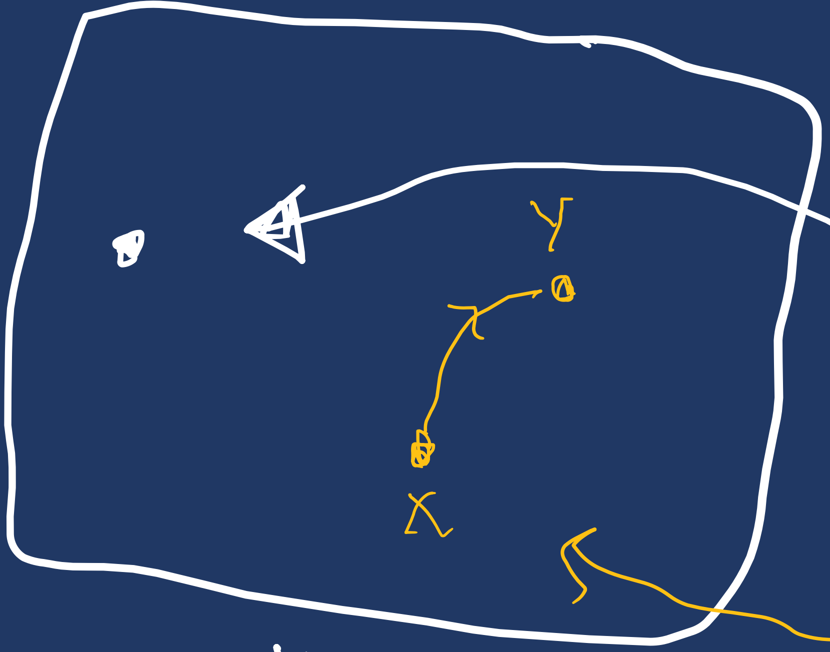


$F \subseteq X \times X$

to nie jest funkcja

$$\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv \neg\neg p \wedge \neg q \equiv p \wedge \neg q$$

$$(*) \equiv (\forall x)(\forall y_1, y_2)\big(((x,y_1)\in F \wedge (x,y_2)\in F) \to y_1 = y_2\big)$$



$F \subseteq X \times X$

$x \in X$

1) $x \notin dom(F)$

2) $x \in dom(F)$

jest y t. że $(x,y) \in F$

weźmy dowolne z t. że

$(x,z) \in F$

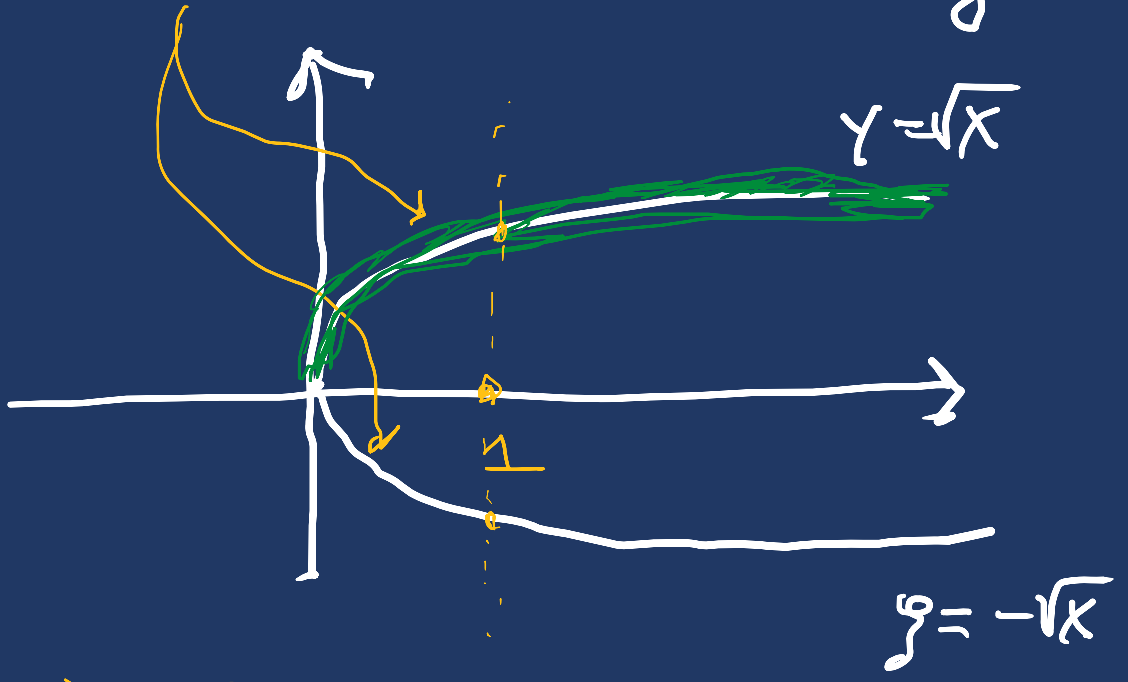
wtedy $z = y$.

Określenie. F – funkcja:

$y = F(x) \equiv$ 1) $x \in dom(F)$

2) $(x,y) \in F$.

(P) $R = \{(x,y) : y^2 = x\}$ $(\mathbb{R})$

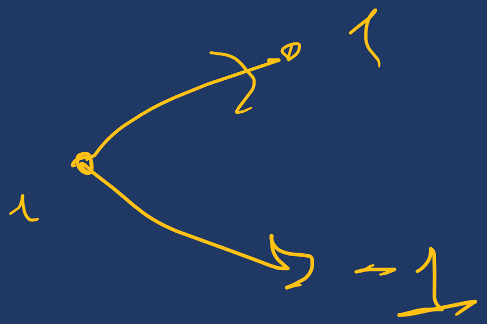


- $(x,y) \in R \rightarrow$
  $y^2 = x \rightarrow x \geq 0$
- $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y^2 = x \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}$

$\equiv y \in \{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\}$.

$\left\{\begin{array}{l} (1,1) \in R \\ (1,-1) \in R \end{array}\right.$



Oznaczenia:

$$f : A \to B \equiv f \text{ jest funkcją } \land \operatorname{dom}(f) = A \land \operatorname{rng}(f) \subseteq B.$$

$$\equiv$$

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

(Z) Pok. że $g \circ f : A \to C$

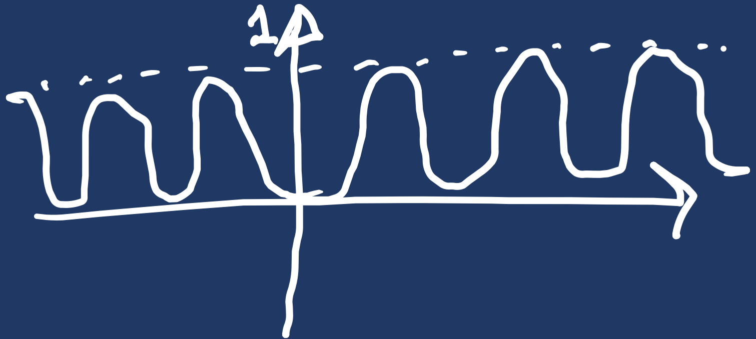
$$(x,z) \in g \circ f \equiv$$
$$\equiv (\exists y)\big((x,y) \in f \land (y,z) \in g\big)$$
$$\equiv (\exists y)\big(y = f(x) \land z = g(y)\big)$$
$$\equiv (\exists y)\big(z = g(f(x))\big)$$
$$\equiv \big(z = g(f(x))\big)$$

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))}.$$

P $\quad f(x) = x^3 \quad ; \quad g(x) = \sin(x)$

$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

1 $\quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sin(x))^2$

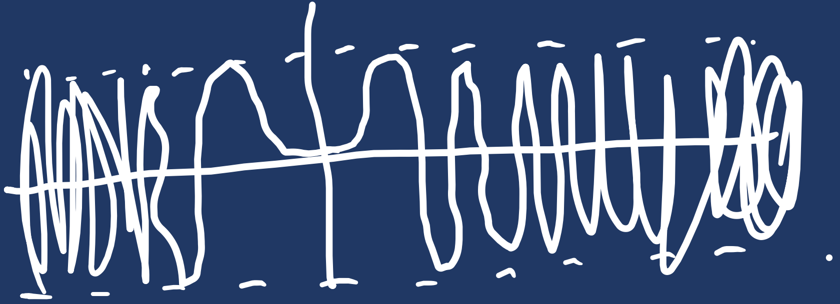


wolfram alpha

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Z

2 $\quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(x^2)$



Z

OGÓLNIE:

$R \circ S \neq S \circ R$

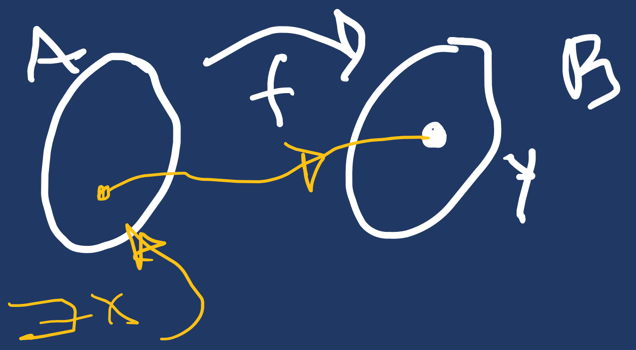
poza nielicznymi wyjątkami.

Def. Niech $f: A \to B$.

(1) f jest surjekcją $\equiv (\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$

(2) f jest injekcją $\equiv (\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$

SURJEKCJA (odw. "na")



$\mathrm{rng}(f) = B$

INJEKCJA

$(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$

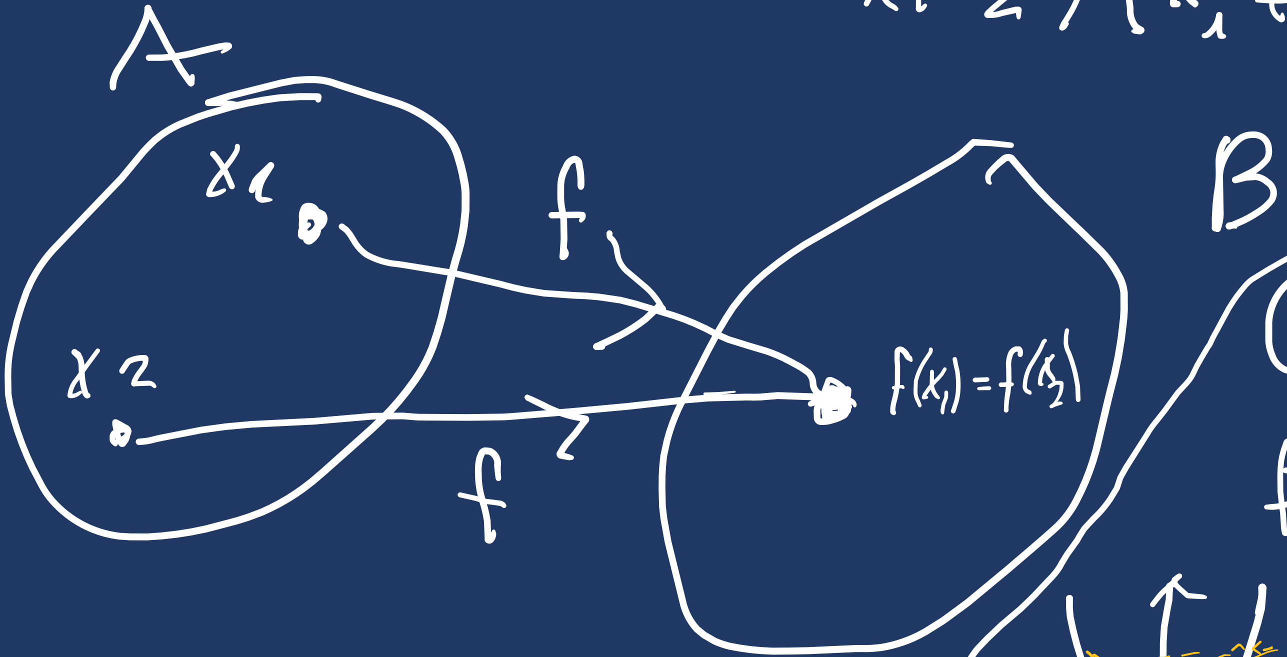
$\equiv (\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2)$

równoważna definicja funkcji 1-1.

$f: A \to B$; f nie jest injekcją ;

$$\neg(\forall x_1, x_2)(x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)) \equiv (\exists x_1, x_2)(x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2))$$

$$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$$



P $f(x) = x^2$

$f(-1) = f(1) = 1$

$-1 \neq 1$

WNIOSEK: Załóżmy, że f jest injekcją. Wtedy f^{-1} jest funkcją.

$$\left.\begin{array}{l}(x, y_1) \in f^{-1}\\(x, y_2) \in f^{-1}\end{array}\right\} \equiv \left\{\begin{array}{l}(y_1, x) \in f\\(y_2, x) \in f\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x = f(y_1)\\x = f(y_2)\end{array}\right\} \Rightarrow f(y_1) = f(y_2)$$

$$\Rightarrow y_1 = y_2 \quad \blacksquare$$

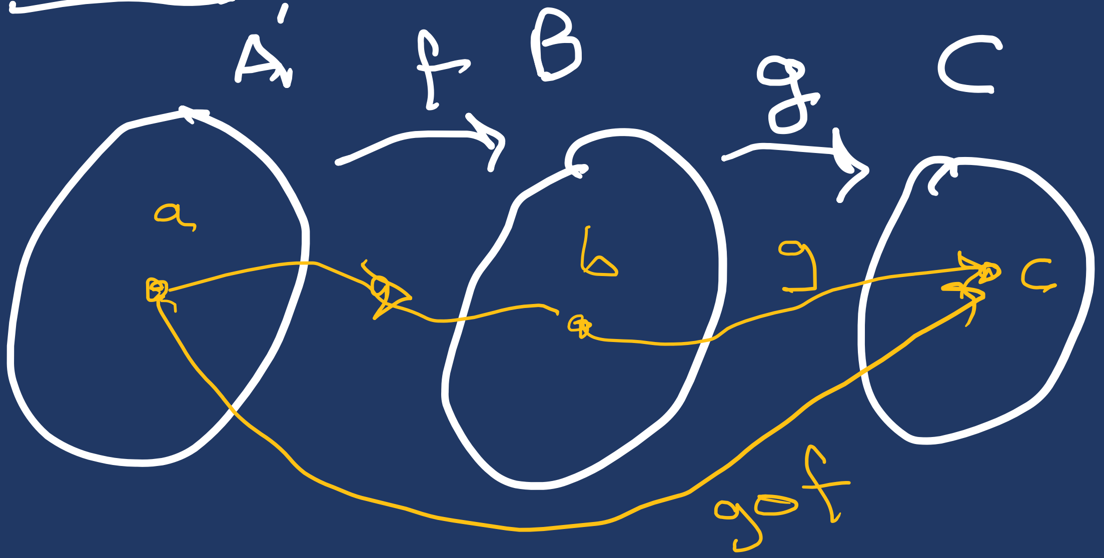
ZADANIE

f - funkcja:

f jest inj. $\equiv$ f^{-1} jest funkcją.

FAKT: $\left.\begin{array}{l} f: A \xrightarrow{na} B \\ g: B \xrightarrow{na} C \end{array}\right] \Rightarrow g\circ f: A \xrightarrow{na} C$

D-d



Weźmy $c \in C$.

Istnieje $b \in B$ t.że $c = g(b)$

Istnieje $a \in A$ t.że $b = f(a)$.

Wtedy $(g\circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$ $\square$

FAKT. Załóżmy, że $f: A \xrightarrow{1-1} B$ i $g: B \xrightarrow{1-1} C$

wtedy

$$g \circ f: A \xrightarrow{1-1} C.$$

D-d. Załóżmy, że $a_1, a_2 \in A$ i $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$

wtedy

$$g(\underbrace{f(a_1)}_{y_1}) = g(\underbrace{f(a_2)}_{y_2})$$

$g(y_1) = g(y_2)$

1-1

$y_1 = y_2$

wtedy

$$f(a_1) = f(a_2)$$

więc

$$a_1 = a_2 \quad \blacksquare$$

Uwaga: skorzystaliśmy z równoważnej definicji 1-1

<u>Def</u>. Funkcję $f: A \to B$ jest <u>BIJEKCJĄ</u> jeśli f jest surjekcją oraz injekcją.

$$f: A \xrightarrow[1-1]{na} B.$$

wn. $\left.\begin{array}{l} f: A \xrightarrow[na]{1-1} B, \\ g: B \xrightarrow[na]{1-1} C \end{array}\right\} \Rightarrow g\circ f: A \xrightarrow[na]{1-1} C$

DEF. A i B są równoliczne $(A \sim B, |A| = |B|)$

$$\Updownarrow$$

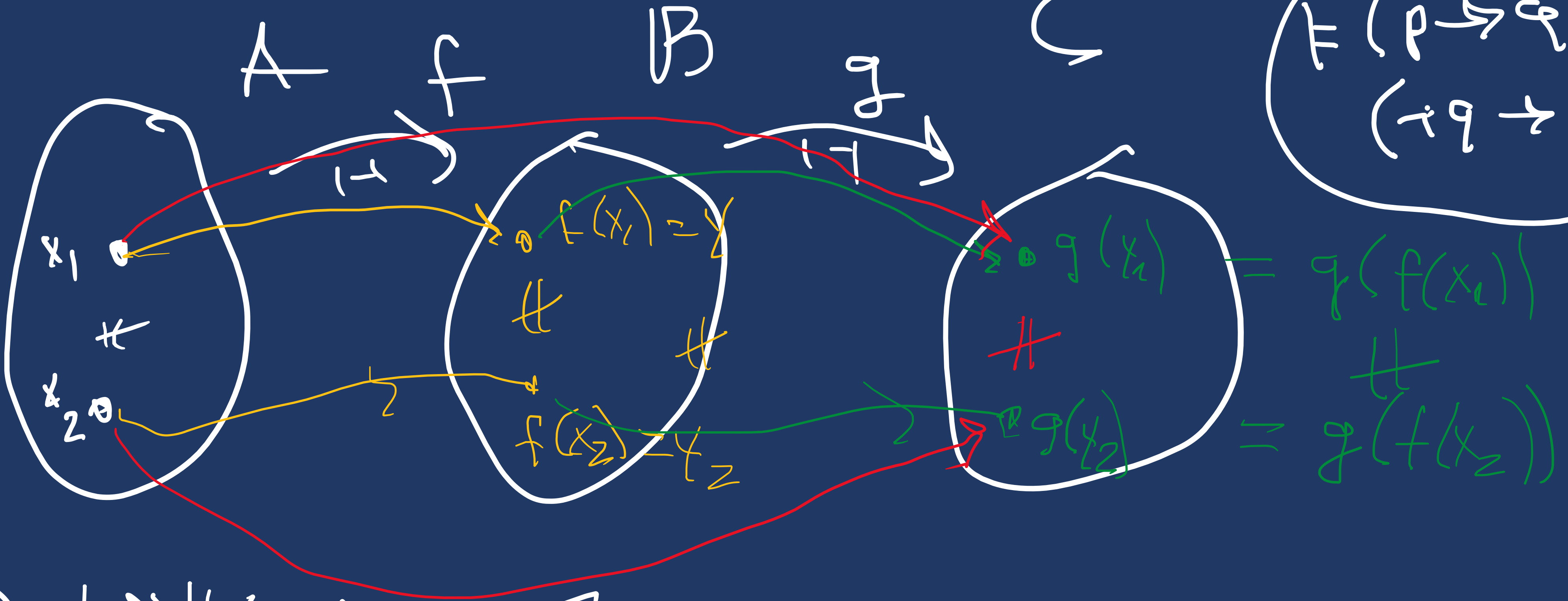
$$(\exists f)\left(f: A \xrightarrow[na]{1-1} B\right)$$

$(\forall x_1, x_2)(x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$ f jest 1-1

$|||$

$\Rightarrow (\forall x_1, x_2)(f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$

$\models (p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$



PO WYKŁADZIE