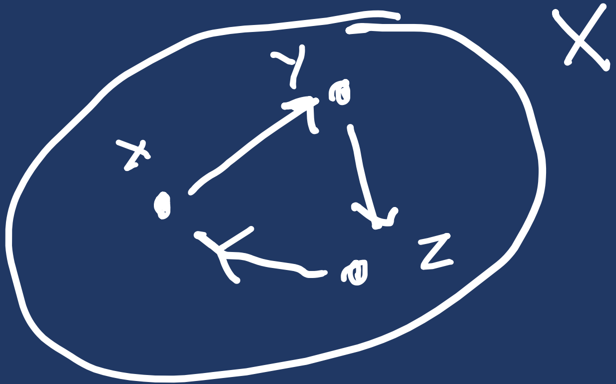
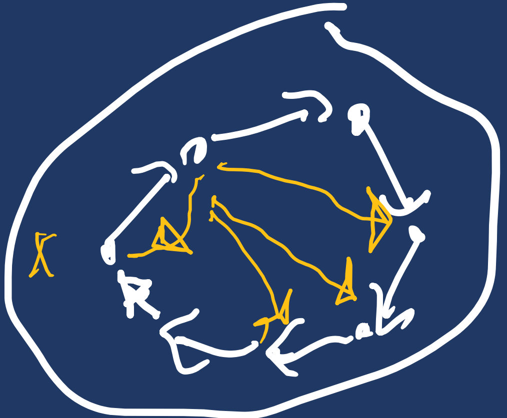
FAKT. $(X, \leq)$ – cz. porz.



$\left.\begin{array}{l} x \neq y \\ y \neq z \\ z \neq x \end{array}\right\}$ to jest niemożliwe

cykl dług. 3

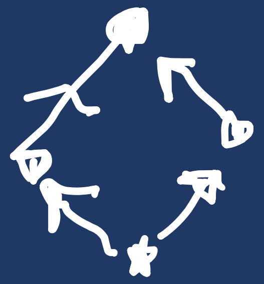
$x \leq y \wedge \underbrace{y \leq z \wedge z \leq x}_{\text{przech}} \longrightarrow x \leq y \wedge y \leq x \xrightarrow[\text{st. antysym}]{} x = y$



w cz. porz. nie ma cykli

P) $\mathcal{X} = (P(\{a,b\}), \subseteq)$ $\qquad$ $\mathcal{Y} = (\{1,2,3,6\}, |)$

$$\begin{tikzcd}
 & \{a,b\} & \\
\{a\} \arrow[ur] & & \{b\} \arrow[ul] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$



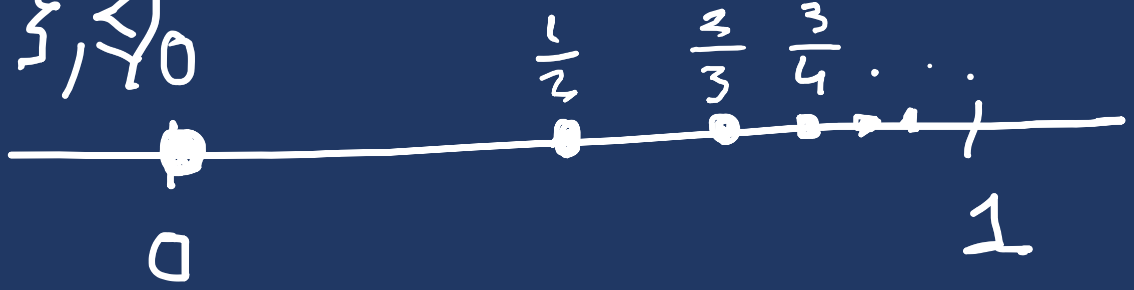
$$\begin{tikzcd}
 & 6 & \\
2 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ul] \\
 & 1 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(\emptyset) &= 1 \\ f(\{a\}) &= 2 \\ f(\{b\}) &= 3 \\ f(\{a,b\}) &= 6 \end{aligned}}$$

Def. Cz. porz. $\mathcal{X} = (X, \le)$ i $\mathcal{Y} = (Y, \preceq)$ są IZOMORFICZNE jeśli istnieje $f: X \xrightarrow[na]{1-1} Y$ t. że

$$(\forall x_1, x_2 \in X)\big((x_1 \le x_2) \longleftrightarrow (f(x_1) \preceq f(x_2))\big).$$

(P) $\mathcal{P} = \left(\left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}, <\right)$



$$\mathcal{P} \underset{ISO}{\cong} (\mathbb{N}, \leq)$$

$$f : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\} : n \longrightarrow 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$n \leq m \Longleftrightarrow n+1 \leq m+1 \Longleftrightarrow \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{m+1}$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{n+1} \leq -\frac{1}{m+1} \Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1 - \frac{1}{m+1}$$

$$\Longleftrightarrow f(n) \leq f(m)$$

Ukážka: $\mathcal{X}=(X,\leq_1)$; $\mathcal{Y}=(Y,\leq_2)$, $\mathcal{Z}=(Z,\leq_3)$

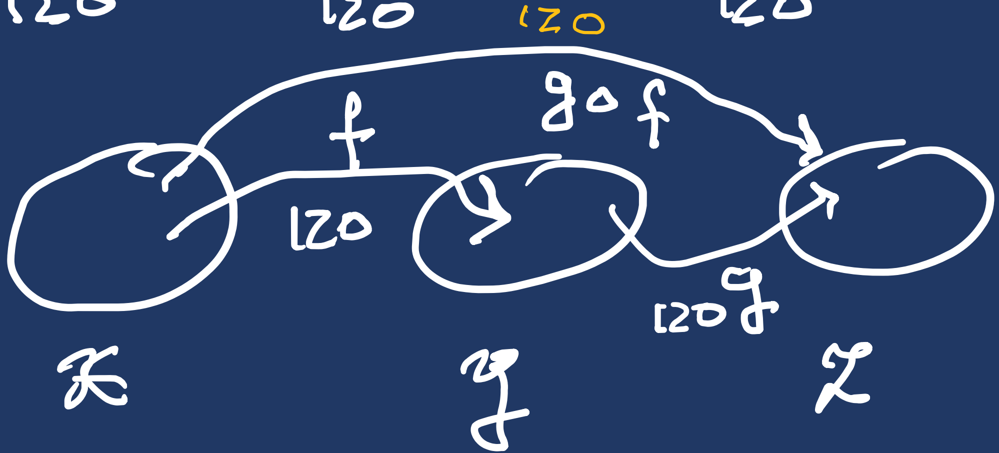
1. $\mathcal{X} \underset{IZO}{\simeq} \mathcal{X}$; $f = id_X$

2. $\mathcal{X} \underset{IZO}{\simeq} \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y} \underset{IZO}{\simeq} \mathcal{X}$

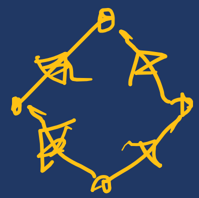
$f: X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y$, IZO

$f^{-1}: Y \xrightarrow[\text{na}]{1-1} X$, IZO

3. $\mathcal{X} \underset{IZO}{\simeq} \mathcal{Y} \wedge \mathcal{Y} \underset{IZO}{\simeq} \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{X} \underset{IZO}{\simeq} \mathcal{Z}$



$[(P(\{a,b\}),\subseteq)]_{\simeq}$

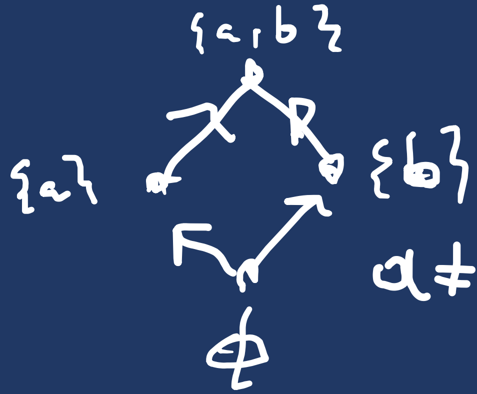


Def. $(L, \leq)$ – liniowy porządek

$\Updownarrow$

- $(L, \leq)$ – cz. porz.
- $\boxed{(\forall x, y \in L)(x \leq y \vee y \leq x)}$

(P) $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ – liniowe porz.

(P) 

$a \neq b$

$\neg(\{a\} \leq \{b\}) \wedge \neg(\{b\} \leq \{a\})$

$\{a\}, \{b\}$ są nieporównywalne w $(\mathcal{P}(\{a,b\}), \subseteq)$.

(P) $(\mathbb{N}, \leq)$ 

FAKT. Zał. że $(L, \leq)$ jest LIN. PORZ., $a \in L$.

Wtedy: a – $\leq$-maks $\longrightarrow$ a jest $\leq$-najw.

D-d. Zał. że a jest $\leq$-maks,

Niech $x \in L$. Wtedy

$$a \leq x \quad \text{lub} \quad x \leq a .$$

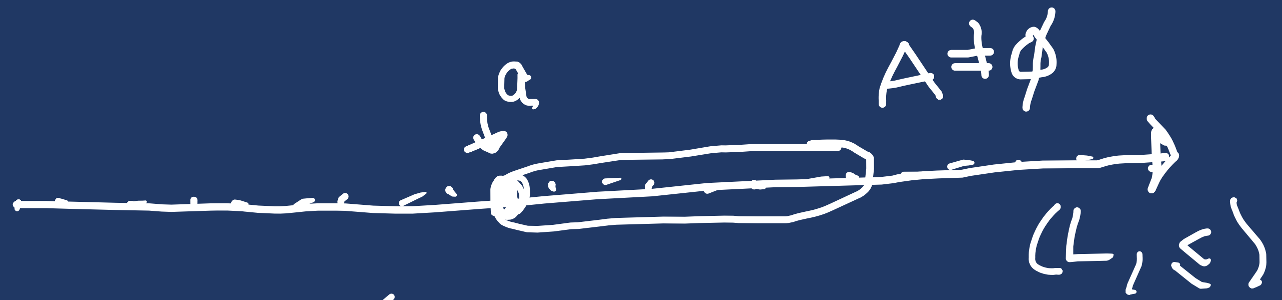
P1. $a \leq x \xrightarrow[\text{z maks.}]{} a = x \xrightarrow[\text{zw}]{} x \leq a$

P2. $x \leq a \longrightarrow x \leq a$

Zatem $x \leq a$. CZYLI $(\forall x \in L)(x \leq a)$ $\boxtimes$

Def. Liniowy porządek $(L, \leq)$ jest dobrym porządkiem jeśli

$$(\forall A \subseteq L)(A \neq \emptyset \to (\exists a \in A)(\forall x \in A)(a \leq x))$$



$a \leftarrow$ najmniejszy element zbioru A.

P1 $(\mathbb{Z}, \leq)$ czy jest dobrze porz.?

NIE: $A = \mathbb{Z}$

w $\mathbb{Z}$ nie ma najm. liczby

bo: $k \in \mathbb{Z} \rightarrow$, $k-1 \in \mathbb{Z}$

$k-1$, $k-1 < k$

P2 $([0, \infty), \leq)$

$A = (0, \infty)$

1) $A \neq \emptyset$

2) $a \in A \equiv a > 0 \longrightarrow$ w A nie ma elem. najm.

$\rightarrow 0 < \frac{a}{2} < a$

$\nwarrow \in A$

AKSJOMAT: $\boxed{(\mathbb{N}, \le) \text{ jest DOBRZE UPORZĄDKOWANY}}$

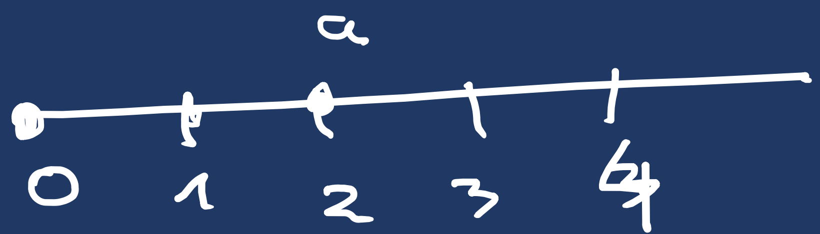
CZYLI:

$$(\forall A \subseteq \mathbb{N})(A \neq \emptyset \to (\exists a \in A)(\forall x \in A)(a \le x))$$

Własności $\mathbb{N}$:

1) $(\forall x \in \mathbb{N})(0 \le x)$

2) $(\forall a \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})(a \le x \to (a = x \vee a+1 \le x))$

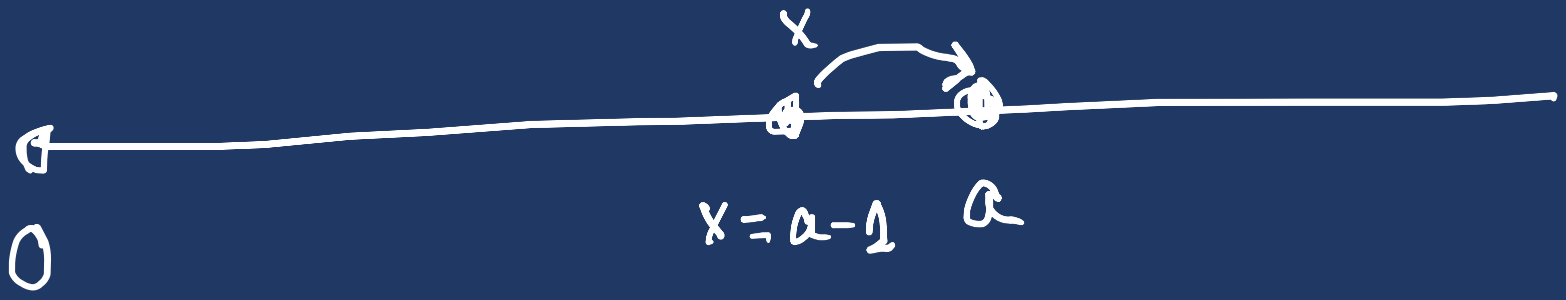


succesor

OZNACZENIE: $S(x) = x+1$ // następnik x

(2) $\equiv (\forall a \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})[a \leq x \rightarrow a = x \vee S(a) \leq x]$

(3) $(\forall a \in \mathbb{N})(a \neq 0 \rightarrow (\exists x \in \mathbb{N})(a = S(x)))$



! Tw.

1) $(\mathbb{N}, \leq)$ jest dobrym porządkiem

2) Niech $\varphi: \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, $a \in \mathbb{N}$.

Indukcji matematycznej

wtedy

$$\Big(\varphi(a) \wedge (\forall x \in \mathbb{N})(\varphi(x) \to \varphi(x+1))\Big) \to \Big((\forall x \in \mathbb{N})(x \geq a \to \varphi(x))\Big)$$

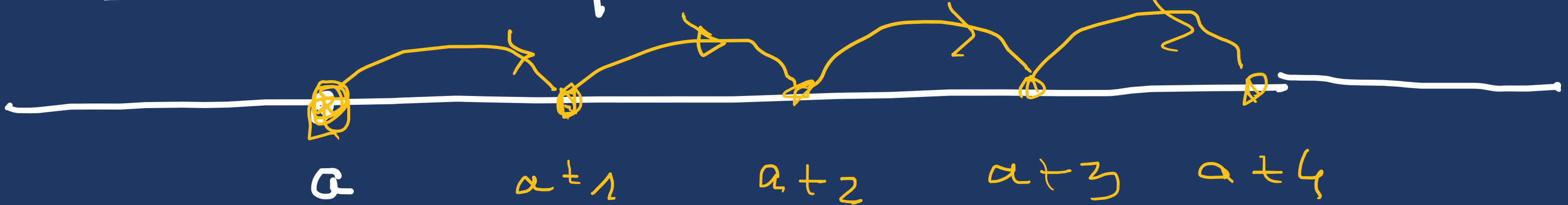
3) nie istnieje funkcja

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

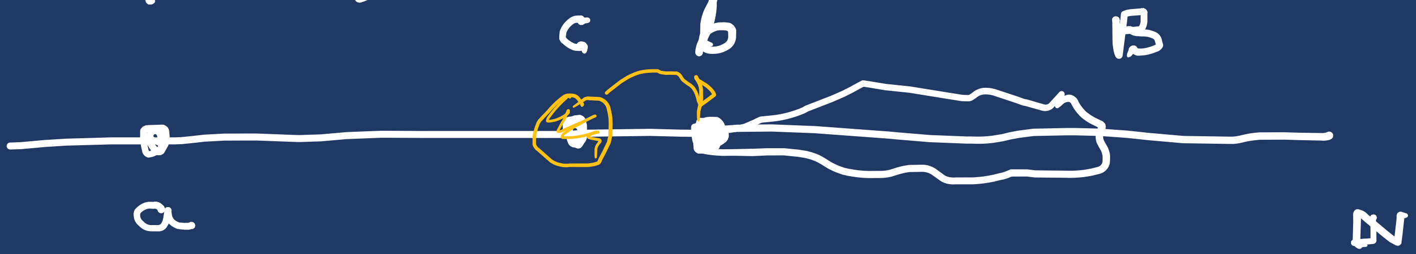
t.że $(\forall x, y)_{\mathbb{N}} (x < y \to f(x) > f(y))$

D-d. (1) $\to$ (2) mamy $\varphi : \mathbb{N} \to \{0,1\}$

Wiemy, że $a \in \mathbb{N}$ t. że $\varphi(a)$.



Wiemy, że $\varphi(x) \to \varphi(x+1)$.



niech $B = \{x \in \mathbb{N} : x \geq a \wedge \neg\varphi(x)\}$.

Zał. że $B \neq \emptyset$.

Niech $b = \min(B)$.

wtedy $b \in B$, więc $\neg\varphi(b)$.

Również $b \neq a$. więc $b \neq 0$.

niech $c = b - 1 < b$

$c \geq a$, ZATEM $c \notin B$.

ZATEM $\varphi(c)$, ZATEM $\varphi(c+1)$

ZATEM $\varphi(b)$ sprz.

(2) $\longrightarrow$ (3).

$\varphi(n) =$ nie istnieje ciąg nieskończ. $n \geq a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > \dots$

- $\varphi(0)$: $0 = a_0 > a_1, \dots$ niemożliwe (inaczej $a_1 < 0$)
- Zał. że $\varphi(n)$.

Pok. że $\varphi(n+1)$ jest prawdziwe.

Zał. że jest źle, czyli że jest taki ciąg

$$n+1 \geq a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

wtedy

$$n \geq a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

$$n \geq b_0 > b_1 > b_2 > \dots$$

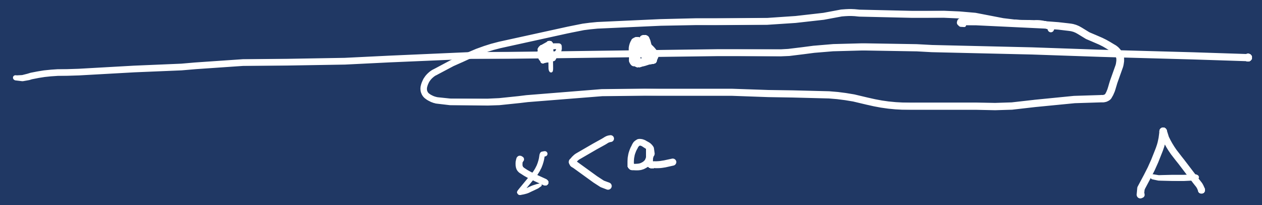
sprzecz. z $\varphi(n)$ $\square$

$(3) \longrightarrow (1)$

Zał. że $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$.

Zał. że jest źle; czyli

$$(\forall a \in A)(\exists x \in A)(x \leq a \wedge x \neq a)$$



Weźmy $a \in A$; $a_0 = a$. wtedy

Jest $a_1 \in A$: $a_1 < a_0$ $\quad a_0 > a_1 > a_2 > \ldots\ldots$

Jest $a_2 \in A$: $a_2 < a_1$ $\quad$ sprzeczność

Jest $a_3 \in A$: $a_3 < a_2$ $\quad \square$

(P)

```
int nwd(int a, int b) {
    while (a ≠ b) {
        if (a < b) {b = b - a;}
        else       {a = a - b;}
    }
    return a;
}
```

(a_n, b_n) : wartości zmiennych (a, b) po i-tej iteracji.

(a_0, b_0) : pocz. wartości

$c_n = a_n + b_n$; $c_0 > c_1 > c_2 > c_3 > \dots$ liczby naturalne] MUSI SIĘ skończyć.

(P)

PO WYKŁADZIE

$(\forall n\in\mathbb{N})(\exists k)_{\mathbb{N}}(n=2k \vee n=2k+1)$

$\varphi(n) = (\exists k)_{\mathbb{N}}(n=2k \vee n=2k+1)$

$\varphi:\mathbb{N}\to\{0,1\}$

- $\varphi(0)$: $0 = 2\cdot 0$
- Zał. że $\varphi(n)$. Jest k t. że $n=2k$ lub $n=2k+1$.

wtedy $\varphi(n+1)$.

1) $n=2k$: $n+1 = 2k+1$

2) $n=2k+1$: $n+1 = (2k+1)+1 = 2k+2$
$= 2(k+1) = 2\cdot l$ $\quad l = k+1$

$\varphi(x) \to \varphi(x+1)$

ZATEM $(\forall x)(x \geq 0 \to \varphi(x))$ ZATEM $(\forall x\in\mathbb{N})\varphi(x)$

P izomorfizm grup.

$$(\mathbb{Z},+)/(5\cdot\mathbb{Z}) \cong (\{[0],\dots,[4]\}, *) \cong C_5 = (\{0,1,2,3,4\}, \oplus_5)$$

izo

+ mod 5

Grupy

$\simeq$ izo

? $\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$?

$$\emptyset \in \{\emptyset\}$$

zał. że $\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$

wtedy

$$\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$$

$$\emptyset = \{\emptyset\}$$

$$\emptyset = \{\emptyset\} \ni \emptyset$$

$\emptyset \ni \emptyset$ BZURA. sprz.

$$a \in \{a\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} x \in \{a\} \\ \Updownarrow \\ x = a \end{array}\right.$$

$(a,b) = \{\{a\},\{b\}\}$

$$\boxed{(a,b) \overset{def}{=} \{\{a\},\{a,b\}\}}$$

$(1,2) = \{\{1\},\{2\}\}$

$(2,1) = \{\{2\},\{1\}\} = \{\{1\},\{2\}\}$

$(1,2) = (2,1)$

LIPNA DEFINICJA

$\{\{a\},\{a,b\}\} \neq \{a,b\}$