# Regularne podzbiory $\mathbb{R}^n$

1. $S = \{(a,b) : a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$

$|S| = \mathfrak{c}$

- $S \supseteq \{(0,x) : x > 0\}$

$|(0,\infty)| = \mathfrak{c}$

$|S| \geq \mathfrak{c}$

- $|S| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \mathfrak{c}$

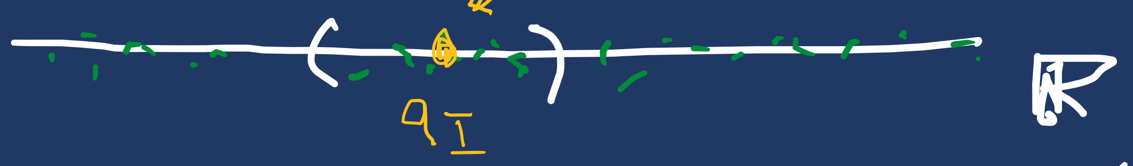
2. Tw. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną odc. otw.

t.że $(\forall I, J \in \mathcal{A})(I \neq J \rightarrow I \cap J = \emptyset)$

wtedy $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$

**D-d.** $\mathcal{A}$ - rodz. odc. parami rozł. otw. $\neq \emptyset$

$\mathcal{A} \ni I$




- $\mathbb{Q}$ są gęste w $\mathbb{R}$
- $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

Dla każdego $I \in \mathcal{A}$ ustalmy $q_I \in I \cap \mathbb{Q}$.

Niech $f(I) = q_I$. Wtedy 1) $f: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{Q}$

2) $I, J \in \mathcal{A}$, $I \neq J$ $\longrightarrow$ $f(I) \neq f(J)$


$I \cap J = \emptyset$

$$f: \mathcal{A} \xrightarrow{1-1} \mathbb{Q} \xrightarrow[na]{1-1\ \ g} \mathbb{N}$$

$$g \circ f \quad 1-1$$


$\Downarrow$

$\mathcal{A}$

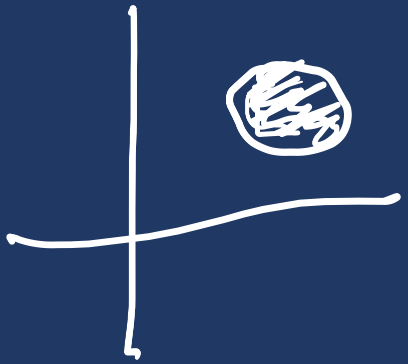
skończ. ($\equiv$ ogr)

nieskończ. ($\equiv$ nieogr)

$\square$

③ Uogólnienie –

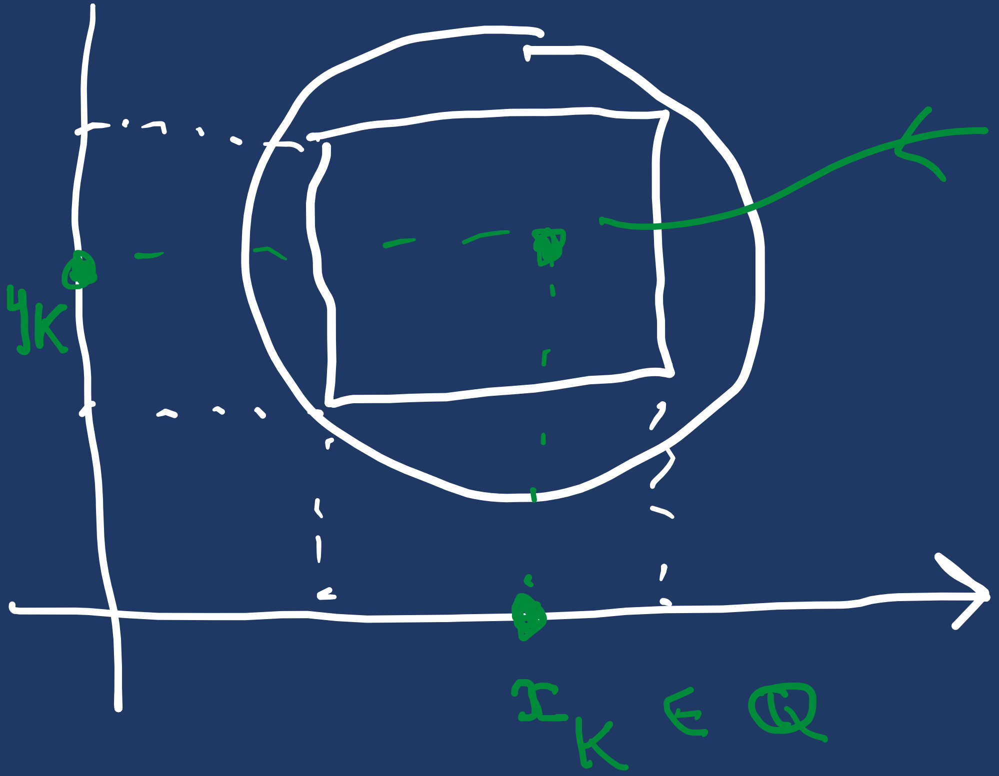
$\mathcal{A}$ – rodzina parami rozł. otw. kół wypukłych $\subseteq \mathbb{R}^2$



Wtedy $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$.


$K \in \mathcal{A}$

$\rightsquigarrow (a,b)\times(c,d) = T_K$

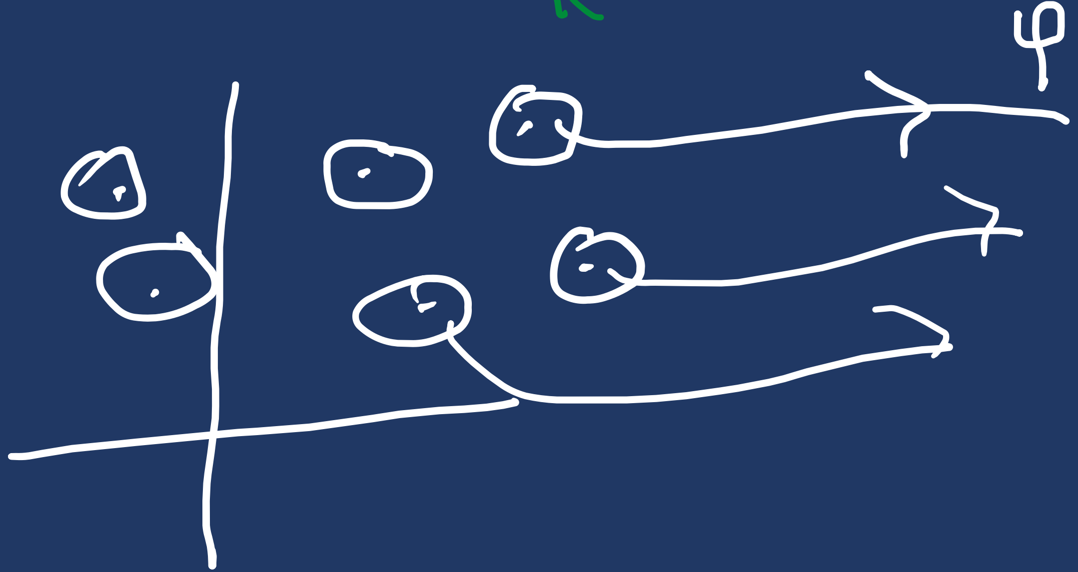



$(x_k, y_k) \in (a,b) \times (c,d) \subseteq K$

$\cap$

$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

"$\mathbb{Q}^2$ są gęste na $\mathbb{R}^2$"




$\varphi : A \xrightarrow{1-1} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

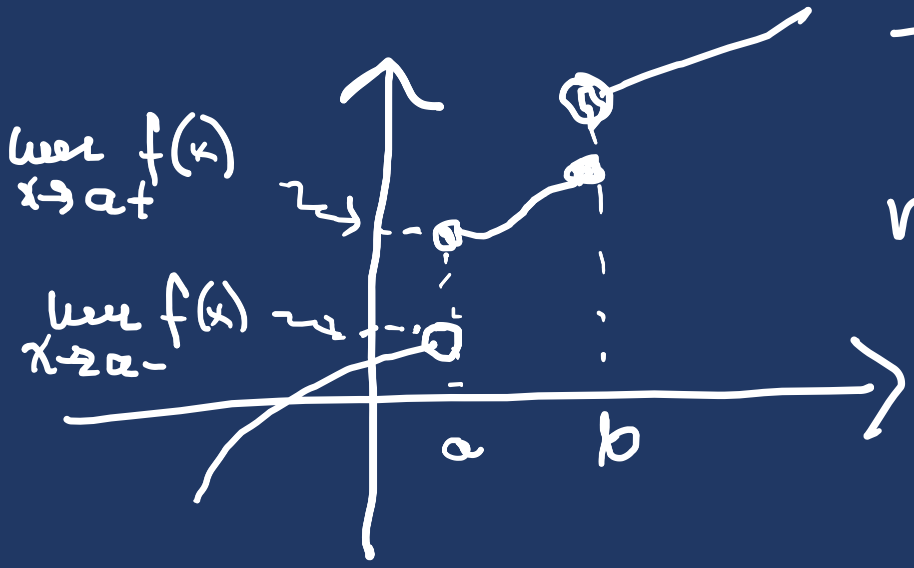
$|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$

$\blacksquare$

**Tw.** Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie monotoniczna. $(x < y \to f(x) \leq f(y))$. Niech

$$nc(f) = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ nie jest ciągła w } x\}$$

Wtedy $|nc(f)| \leq \aleph_0$.




$nc(f) = \{a, b\}$

D-d. Zał. że $f$ jest niemalejąca

$$x_0 \in nc(f) \equiv \lim_{x\to x_0^-} f(x) < \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

$$nc(f) \ni a \longrightarrow \left(\lim_{x\to a-} f(x), \lim_{x \to a+} f(x)\right) = I_a$$

odc. otwarty, $\neq \emptyset$


$$\left.\begin{array}{l} a<b \\ a,b \in nc(f) \end{array}\right] \to I_a \cap I_b = \emptyset$$

$$nc(f) \xrightarrow{1-1} \{I_a : a \in nc(f)\}$$

parami rozł. niepuste odcinki

jest przeliczalna.

# Aksjomaty Zermelo-Fraenkela Teorii Mnogości

Język teorii:
- logika klasyczna: $\wedge, \vee, \rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$

  $\forall, \exists, =$
- ~~jest~~ jeden symbol (predykat): $\in$
- zmienne: $x_0, x_1, x_2, \ldots$ $(x, y, z, u, v, w, \ldots)$

np. $x \in y$, $y = z$

$(x \in y) \wedge (y = z)$, $\neg(x \in y)$, $\neg(z = u)$

$(\forall x)(\exists y)(\forall t)(y \in t \Leftrightarrow y = x)$ ← zdanie

ZF

↑ język teorii mnog.

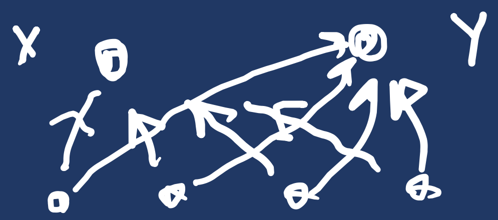
(A1) (Aksjomat Ekstensjonalności)

$$(\forall x)(\forall y)\big((\forall z)(z\in x \leftrightarrow z\in y) \to x=y\big)$$

Oznaczenie: $x\subseteq y \equiv (\forall t)(t\in x \to t\in y)$

wn. $(\forall x)(\forall y)\big(x=y \leftrightarrow (x\subseteq y \wedge y\subseteq x)\big)$

P




Ozn: $x\notin y \equiv \neg(x\in y)$

FAKT:

(A2) (aksj. zbioru pustego)

$$(\exists x)(\forall y)(\neg(y\in x))$$

Tw. $(\forall x_1)(\forall x_2)\Big(\big((\forall t)(t\notin x_1)\wedge(\forall t)(t\notin x_2)\big)\to x_1=x_2\Big)$

Ozn. $\emptyset \leftarrow$ takie $x$, że $(\forall t)(t\notin x)$.

(A3) (Aksjomat Pary)

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall t)\big(t\in z \leftrightarrow (t=x \vee t=y)\big).$$

$\uparrow$ $\cancel{\emptyset\{} \leftrightarrow \{x,y\}$

Tw. Para nieup. jest wyznaczona jednoznacznie.

Ozn: $\{x,y\}$ = takie $z$, że $(\forall t)\big(t\in z\leftrightarrow(t=x \vee t=y)\big)$

(P) mamy: $\emptyset$, $\{\emptyset,\emptyset\}=\{\emptyset\}$,

$\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, ...

$\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, ....

(A4) (Aksjomat Sumy)

$$(\forall x)(\exists y)(\forall t)\big(t\in y \longleftrightarrow (\exists z)(z\in x \wedge t\in z)\big)$$

FAKT: "ten $y$ jest wyznaczony jednoznacznie"

$\bigcup x$

$$t \in \bigcup x \longleftrightarrow (\exists A\in x)(t\in A)$$

$$\longleftrightarrow (\exists A)(A\in x \wedge t\in A)$$

$$\longleftrightarrow (\exists z)(z\in x \wedge t\in z).$$

UWAGA: ± każdy zbiór jest rodziną zbiorów.

Ⓟ $t \in \bigcup \{a, b\} \leftrightarrow (\exists z)(z \in \{a, b\} \wedge t \in z)$

$\leftrightarrow (\exists z)((z = a \vee z = b) \wedge t \in z)$

$\leftrightarrow t \in a \vee t \in b \leftrightarrow t \in a \cup b$

$$\bigcup \{a, b\} = a \cup b$$

Ⓟ <u>Def</u>. $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$ ← [illegible], (A5) (Aksj. zb. potęgowego)

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \longleftrightarrow z \subseteq x)$$

$P(x) \leftarrow$ jednoznaczność.

Z

(A6) (Aksj. wyróżniania). Dla dowolnej formuły $L_{ZF}$ $\varphi(t, y_1, \dots, y_n)$:

$$(\forall x)(\forall y_1, \dots y_n)(\exists a)(\forall t)(t \in a \leftrightarrow (t \in x \wedge \varphi(t, y_1 \dots y_n))).$$

$\{t \in x : \varphi(t, y_1 \dots y_n)\} \leftarrow$ jednoznaczność

P mam $x, y$: $a = \{t \in x : \underbrace{t \in y}_{\varphi(t,y)}\} = a \wedge b$

$$\{t \in X : \neg(t \in Y)\} = X \setminus Y.$$

many : $\cap, \cup, \setminus$ .

P

$$\left.\begin{array}{l} a \in X \\ b \in Y \end{array}\right] \longrightarrow a, b \in X \cup Y \longrightarrow \{a,b\} \subseteq X \cup Y$$

$$a, b \in X \cup Y \rightarrow \{a\} \subseteq X \cup Y \rightarrow \{a\} \in P(X \cup Y)$$

$$\{a,b\} \subseteq X \cup Y \rightarrow \{a,b\} \in P(X \cup Y)$$

$$\{a\} \in P(X \cup Y),\ \{a,b\} \in P(X \cup Y) \Rightarrow \{\{a\}, \{a,b\}\} \subseteq P(X \cup Y)$$

$$\{\{a\}, \{a,b\}\} \subseteq P(X \cup Y) \rightarrow (a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\} \in P(P(X \cup Y))$$

$$\left.\begin{array}{l} a \in X \\ b \in Y \end{array}\right] \Rightarrow (a,b) \in P(P(X \cup Y))$$

Mamy $x, y$.

Chcemy zbudować $x \times y$.

$$x \times y = \{ u \in P(P(x \cup y)) : (\exists a \in x)(\exists b \in y)(u = (a, b)) \}$$

- możemy zdefiniować:
  - relacje $(rel(x) \equiv (\exists z)(z \subseteq x \times x))$
  - funkcje $(func(x) \equiv (rel(x) \wedge \ldots\ldots$
  - inj, surj
  - obraz, przeciwobraz

CIĄGLE NIE JESTEŚMY W STANIE UDOWODNIĆ ISTNIENIA ZBIORU NIESKOŃCZONEGO !!!