CEL : AC $\longrightarrow$ LKZ

(✓) ... to już wiemy

Narzędzie : Tw. o rekursji pozaskończonej:

$$\forall x\, \exists! y\ \varphi(x,y) \longrightarrow (\forall \alpha \in ON)(\exists f)\big(\operatorname{dom}(f) = \alpha \wedge (\forall \beta < \alpha)\, \varphi(f\restriction_\beta, f(\beta))\big).$$

Przykład : $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_0 + x_1 + .. + x_n \end{cases}$

$x_1 = x_0 = 1$

$x_2 = x_0 + x_1 = 1 + 1 = 2$

$x_3 = 1 + 1 + 2 = 4$

$x_0 = 1$
$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
$x_3 = 4$
$x_4 = 8$
$x_5 = 16$
$x_6 = 32$

Hipoteza: $x_n = 2^{n-1}$ $n \geq 1$

D-d: indukcja matem. (Z)

(P) $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_0 + \ldots + x_n + 3 \end{cases}$

$x_0 = 1$
$x_1 = 2 \; 4$
$x_2 = 4 \; 8$
$x_3 = 16$
$\vdots$

$n = \{0, \ldots, n-1\}$

$x_n \leftarrow (x_0, x_1, \ldots x_n)$

$x(n) \leftarrow x \restriction_n$

Tw. AC $\rightarrow$ LKZ

D-d. Ustalmy $(X, \leq)$ spełnia LKZ.

Niech $w : P(X) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow X$ t. że $w(A) \in A$ dla $A \in P(X) \setminus \{\emptyset\}$

(istnieje $\Leftarrow$ AC)

Niech $* \notin X$.

Niech $w^* : P(X) \longrightarrow X \cup \{*\}$:

$$w^*(A) = \begin{cases} w(A) & : A \neq \emptyset \\ * & : A = \emptyset \end{cases}$$

$(w^* = w \cup \{(\emptyset, *)\})$

Niech $\alpha = \mathcal{H}(X)$.

wtedy: $\neg(\exists f)(f : \alpha \xrightarrow{1-1} X)$.

Definiujemy

$$\varphi(f, y) = \left[fnc(f) \wedge y = w^*\left(\{x \in X : (\forall a \in rng(f) \cap X)(x > a)\}\right)\right]$$
$$\vee \left[\neg fnc(f) \wedge y = *\right]$$

1) $\beta = 0$: $\varphi(f \restriction \emptyset, f(0))$; $f \restriction \emptyset = \emptyset$;

$$f(0) = w^*(X)$$

2) $\beta = 1$; $f \restriction 1 = f \restriction \{0\} = \{(0, f(0))\}$: $f(1) = w^*(\{x \in X : x > f(0)\})$

$$f(0) < f(1)$$

3) $\beta = \omega$ $\qquad \varphi(f\restriction_\omega, f(\omega))$

$$f(\omega) = w^*\left(\{x\in X : (\forall n\in\omega)(f(n) < x)\}\right)$$

<u>Fakt</u>. $f(\beta) \neq * \longrightarrow$

$\longrightarrow (\forall \eta < \xi \leqslant \beta)(f(\eta) < f(\xi))$.

D-d: zał. że ¬. Weźmy min β.
...

GDYBY: $(\forall \beta < \alpha)(f(\beta) \neq *) \Rightarrow$

$f: \alpha \xrightarrow{1-1} X$ źle.

Niech $\beta_0 = \min\{\beta < \alpha : f(\beta) = *\}$.

wtedy 1) $f(\beta_0) = *$
2) $\xi < \beta_0 \rightarrow f(\xi) \in X$.

czy β_0 może być graniczna?
Zał. że tak

$$\underbrace{f(0) < f(1) < \ldots < f(\xi) < \ldots}_{\beta_0}$$

$\mathrm{rng}(f \upharpoonright \beta_0) = \{f(\xi) : \xi < \beta_0\} \leftarrow$ łańcuch

(zał. LKZ) ⟶ jest więc $x \in X$ t. że $(\forall \xi < \beta_0)(f(\xi) < x)$

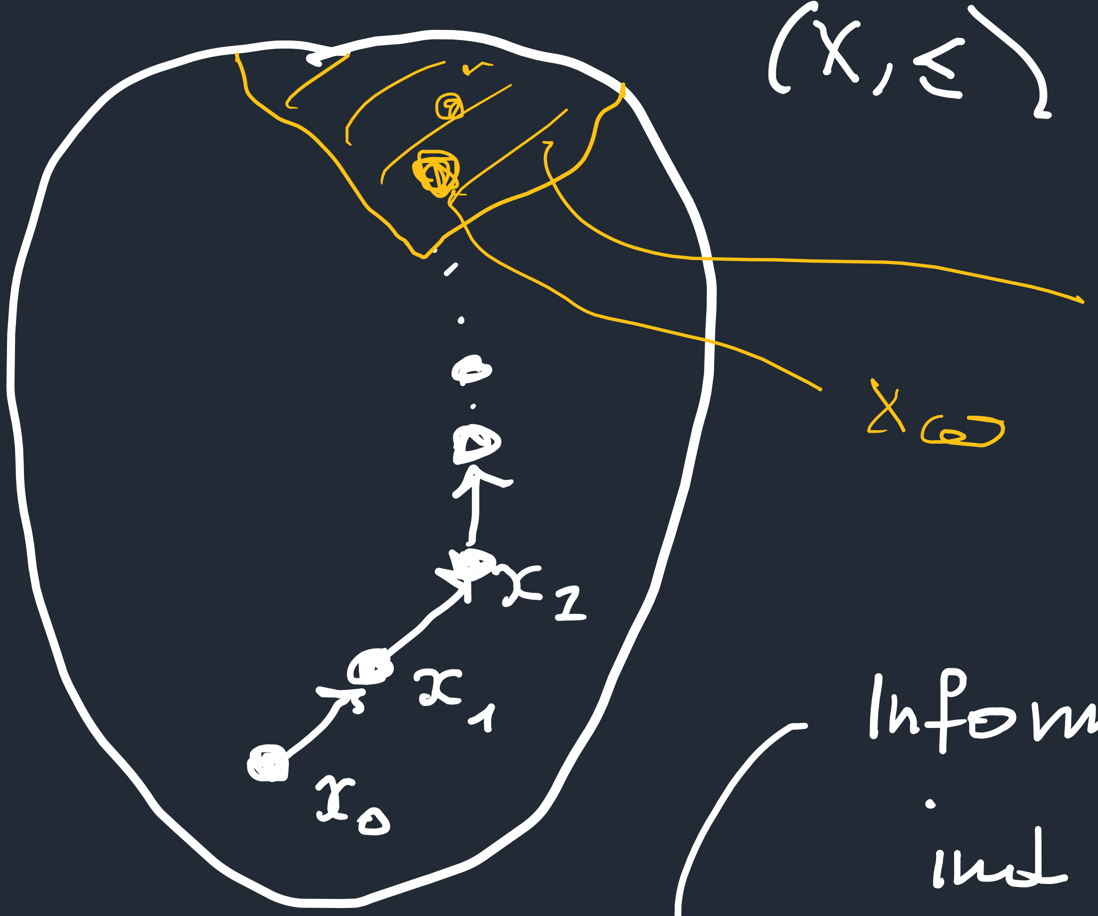
więc $f(\beta_0) \neq *$.

Zatem, jest γ t. że $\beta_0 = \gamma + 1$.

$$x = f(\beta_0) = w^*\big(\underbrace{\{x \in X : x > f(\gamma)\}}_{\emptyset}\big)$$

Więc $f(\gamma)$ jest maksymalny. $\blacksquare$

$(X, \leq)$



Informativna teorija:

ind: ω^ω

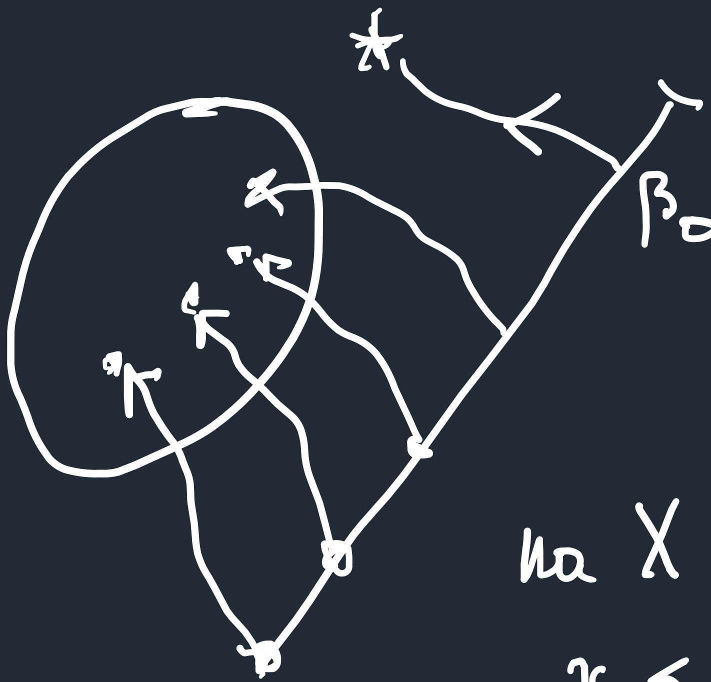
$$\begin{cases} z_0 = \omega \\ z_{n+1} = \omega^{z_n} \end{cases}$$

$$\omega^* = \bigcup_n z_n < \aleph_1$$

Tw. AC $\longrightarrow$ WOP

$AC \leftrightarrow LKZ \leftrightarrow WOP$

D-d. $\varphi(f, y) = (\mathrm{func}(f) \wedge y = w^{*}(X \setminus \mathrm{rng}(f))) \vee$
$(\neg \mathrm{func}(f) \wedge y = \emptyset)$.



$\alpha = \mathcal{H}(X)$

β_0

$h = f \upharpoonright \beta_0$

$\exists\, h : \beta_0 \xrightarrow[na]{1-1} X$

na X określony

$x \precsim y \iff h^{-1}(x) \leq h^{-1}(y)$

$(\beta_0, \leq) \underset{IZO}{\overset{h}{\cong}} (X, \precsim)$ ⊠

Tw. Dla dowolnego dobrego porządku $(X, \leq)$ istnieje dokładnie jedna $\alpha \in On$ t. że

$$(X, \leq) \underset{IZO}{\cong} (\alpha, \leq).$$

[tą α nazywamy typem porządku $(X, \leq)$,

$$\alpha = \overline{(X, \leq)}$$]

(P) $X = \{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \omega\}$, $(X, \leq)$ ← por. z $\mathbb{R}$

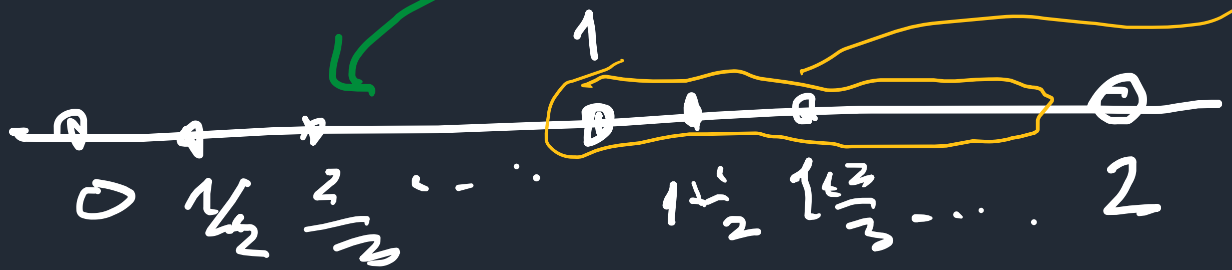
$$\overline{(X, \leq)} = \omega$$

$$Y = \left\{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \omega\right\} \cup \{1\}$$

$$(Y, \leq)$$

$$\overline{(Y, \leq)} = \omega + 1$$

$$Z = \left\{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \omega\right\} \cup \left\{2 - \frac{1}{n+1} : n \in \omega\right\}$$



$$\overline{(Z, \leq)} = \omega + \omega.$$

Uwaga: $\overline{(X, \leq_1)} = \alpha$ $\quad X \cap Y = \emptyset$

$\overline{(Y, \leq_2)} = \beta$

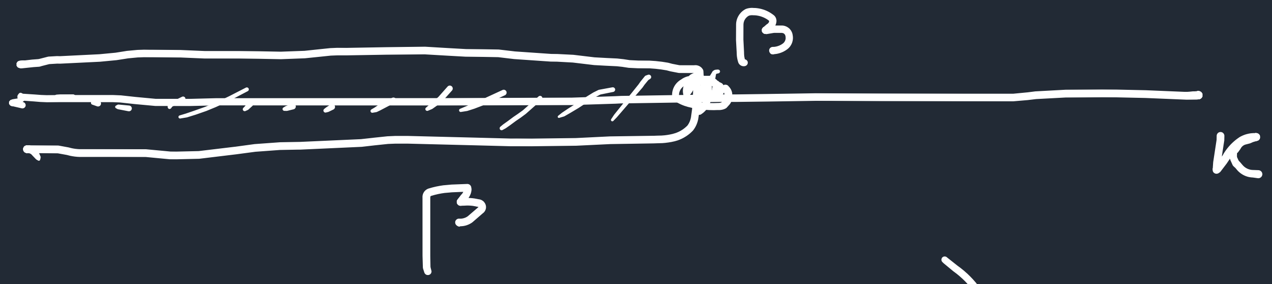
$Z = X \cup Y$: na Z określamy $\leq$

$$\leq \; = \; \leq_1 \cup (X \times Y) \cup \leq_2$$

$\overline{(Z, \leq)} = \alpha + \beta$

LICZBY KARDYNALNE

Def. $\mathrm{card}(\kappa) \equiv \mathrm{ord}(\kappa) \wedge (\forall \beta < \kappa)(|\beta| < |\kappa|)$



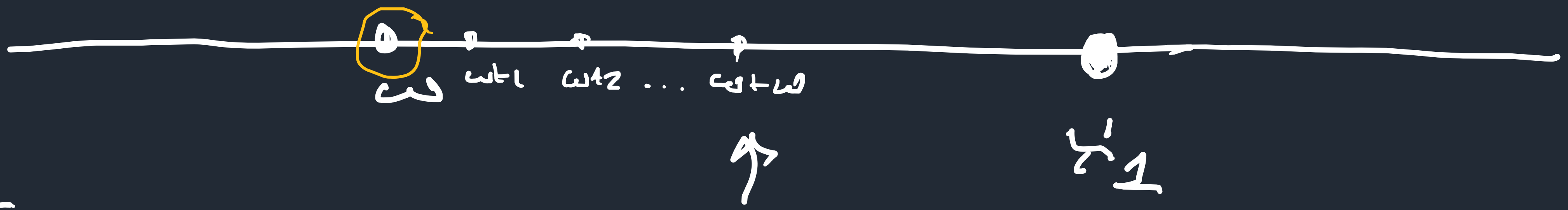
(P) $(\forall n \in \omega)(\mathrm{card}(n))$

(P) $\mathrm{card}(\omega)$

$\neg\,\mathrm{card}(\omega+1)$

$f: \mathbb{N} \cup \{\omega\} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$

$|\mathbb{N}| + 1 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0$



Def.

$$\begin{cases} \aleph_0 = \omega \\ \aleph_{\beta+1} = \mathcal{H}(\aleph_\beta) \\ \aleph_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} \aleph_\xi \quad \left(= \sup\{\aleph_\xi : \xi < \lambda\}\right) \end{cases}$$

moc $\aleph_\beta$

$\beta < \aleph_{\beta+1} \longrightarrow \exists f: \beta \xrightarrow{1-1} \aleph_\beta \longrightarrow |\beta| \leq \aleph_\beta$

$\aleph_{\beta+1} = \mathcal{H}(\aleph_\beta)$

$\neg \exists f: \aleph_{\beta+1} \xrightarrow{1-1} \aleph_\beta$

Lemat: $(\forall \alpha)(\alpha \leq \aleph_\alpha)$.

D-d.
1) $\alpha = 0$: $0 \leq \aleph_0$
2) zał. że dla β jest ok czyli $\beta \leq \aleph_\beta$
   Pok. to dla $\beta + 1$
3) zał. że $\lambda \in LIM$ i $\forall \xi < \lambda : \xi \leq \aleph_\xi$.
   Pok. że $\lambda \leq \aleph_\lambda$.

ZADANIE: pok. że to wystarczy.

Tw. $(\forall\alpha)\ \mathrm{card}(\aleph_\alpha)$

Tw. $(\forall\kappa)\,\big(\mathrm{card}(\kappa) \longrightarrow (\kappa\in\omega \vee (\exists\alpha)(\kappa = \aleph_\alpha))\big)$.

D-d. Zał., że $\mathrm{card}(\kappa)$ i $\kappa \notin \omega$.

Wiemy, że $\kappa \leq \aleph_\kappa$, czyli jest β t. że

$\kappa \leq \aleph_\beta$

$A = \{\alpha \leq \beta : \kappa \leq \aleph_\alpha\} \subseteq \beta+1$.

Niech $\alpha = \min(A)$. Pok. że $\kappa = \aleph_\alpha$. (Z)

WNIOSEK. Zał. że X jest zb. niesk.

(AC) wtedy $(\exists\alpha)(|X| = \aleph_\alpha)$.

D-d. Weźmy X niesk. $\leq$

Z AC mamy dobry porz. na X

wtedy istnieje α t. że $(X, \leq) \underset{\text{IZO}}{\simeq} (\alpha, \leq)$

Wtedy $|X| = |\alpha|$.

Niech $\alpha = \min\{\xi : |\aleph_\xi| \geq |X|\}$.

Wtedy $|X| = |\aleph_\alpha|$.

Tw. ($\forall \alpha \in ON$)

$$\boxed{\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha}$$

Wn.

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_{\max\{\alpha, \beta\}}.$$

D-d. $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$

$$\aleph_\gamma \leq \aleph_\alpha + \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_\gamma \cdot \aleph_\gamma = \aleph_\gamma \quad \blacksquare$$

Dod. - cwyletody.

```
int idint (int x) {return x;}
float idfloat (float x) {return x;}
complex idcomplex (com x) { — " —; }
```

C, C++

Teoria Kategorii