Matematyka Dyskretna
Zadania

Jacek Cichoń
Katedra Podstaw Informatyki Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2021

Oznaczenia

1. $[n] = \{1, \ldots, n\}$
2. $[A]^k = \{X \in P(A) : |X| = k\}$
3. współczynnik dwumianowy: $\binom{n}{k}$
4. liczby Stirlinga I rodzaju: $\left[{n \atop k}\right]$
5. liczby Stirlinga II rodzaju: $\left\{{n \atop k}\right\}$
6. dolna silnia: $x^{\underline{k}} = \prod_{j=0}^{k-1}(x-j)$
7. górna silnia: $x^{\overline{k}} = \prod_{j=0}^{k-1}(x+j)$
8. liczby Bella: $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\}$
9. liczby harmoniczne: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
10. funkcja dzeta Riemana: $\zeta(z) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^z}$

1 Zbiory

Zadanie 1

Niech A i B będą dowolnymi zbiorami skończonymi. Pokaż, że

1. jeśli $A \cap B = \emptyset$, to $|A \cup B| = |A| + |B|$
2. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
3. $|A^B| = |A|^{|B|}$
4. $|P(A)| = 2^{|A|}$

Uwaga: To jest zadanie do samodzielnego zrobienia

Zadanie 2

Pokaż za pomocą indukcji matematycznej, że

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
4. $\sum\limits_{k=1}^{n} (k \cdot k!) = (n+1)! - 1$
5. $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2$
6. $(\forall n \geqslant 10)(2^n > n^3)$

Zadanie 3

Przedstaw co najmniej dwa różne dowody tego, że $(\forall n \in \mathbb{N})(n < 2^n)$

Zadanie 4

Niech $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = 2a_n + b$. Znajdź zwartą postać wzoru na a_n.

Zadanie 5

Pokaż, że dla dowolnych liczb naturalnych a oraz n mamy $|\{k \in [n] : a|k\}| = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$.

Zadanie 6

Wyznacz moce następujących zbiorów:

1. $\{k \in [1000] : 2|k \vee 5|k\}$
2. $\{k \in [1000] : 2|k \vee 5|k \vee 7|k\}$
3. $\{k \in [1000] : 2|k \vee 5|k \vee 7|k \vee 11|k\}$

Zadanie 7

Niech $n \geqslant 3$. Ile jest surjekcji ze zbioru $[n]$ na zbiór $[3]$?

Wskazówka: Niech Z_i oznacza zbiór tych funkcji f z $[n]$ w $[3]$ takich, że $i \notin \mathrm{rng}(f)$. Stosując zasadę włączania - wyłączania wyznacz $|Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3|$.

Zadanie 8

Ile jest funkcji częściowych ze zbioru n elementowego w zbiór m elementowy?
Wskazówka: W niektórych językach programowania występuje pojęcie *undefined*.

* Zadanie 9

Niech S_n oznacza zbiór wszystkich ciągów zero-jedynkowych długości $\leqslant$ n.

1. Pokaż, że $|S_n| = 2^{n+1} - 1$
2. Wskaż bijekcję między zbiorem S_n a zbiorem $\{0,1\}^{[n+1]} \setminus \{(0,0,\ldots,0)\}$.

Wskazówka: Wykorzystaj związek skończonych binarnych ciągów z reprezentacjami binarnymi liczb naturalnych

Zadanie 10

Rozważmy następujący wariant problemu wież z Hanoi: mamy trzy pozycje A, B, C oraz n krążków ustawionych początkowo na pozycji A. Naszym celem jest przestawienie ich na pozycję C z zachowanie zasad z oryginalnego problemu z dodatkowym ograniczeniem: nie możemy przestawiać żadnego krążka bezpośrednio z pozycji A na C ani z C na A. Ile potrzebujemy przestawień?

Zadanie 11

Wyznacz moce następujących zbiorów:

1. $\{(A,B) \in P([n])^2 : A \subseteq B\}$
2. $\{(A,B,C) \in P([n])^3 : A \subseteq B \subseteq C\}$
3. $\{(A,B,C) \in P([n])^3 : A = B \cup C\}$

Zadanie 12

Niech $\Omega = P([n]) \times P([n])$.

1. Wyznacz $\Pr[(X,Y) \in \Omega : X \subseteq Y\}$.
2. Wyznacz $\Pr[(X,Y) \in \Omega : X \cup Y = [n]\}$.

Zadanie 13

Niech $X_i = [n] \times \{i\}$.

1. Wyznacz moc zbioru $S_n = \{A \in P([n] \times [n]) : (\forall i)(A \cap X_i \neq \emptyset)\}$.
2. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{2^{n^2}}$.

Zadanie 14

Rozważmy następującą pętlę:

```
FOR I=1 TO N DO
  FOR J=I TO N DO
    OP(I,J)
```

1. Ile razy wykonywana jest operacja OP wewnątrz tej pętli?
2. Uogólnij to zadanie na pętle głębokości 3.
3. Uogólnij to zadanie na pętle długości k i pokaż, że dla dowolnego $k \geqslant 1$ operacja OP wykonywania jest $\mathrm{O}\left(n^k\right)$ razy.

2 Współczynniki dwumianowe

Zadanie 15

Oblicz 11^4. Jaki związek ma ta liczba ze współczynnikami dwumianowymi?

Zadanie 16

Zastosuj wzór Stirlinga $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot (\frac{n}{e})^n$ do wyznaczenia przybliżeń liczby $\binom{2n}{n}$ oraz liczby $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Zadanie 17

Zajmujemy się algorytmem wyliczania na wyznaczanie liczb $\binom{n}{k}$. Załóżmy, że napisany algorytm jest oparty o tożsamość Pascala $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ Oszacuj złożoność obliczeniową napisanego programu.

Zadanie 18

Niech $\Omega = P([n])$ oraz $A = \{X \in \Omega : (\exists k)(|X| = 2k)\}$. Wyznacz $\Pr[A]$.

Zadanie 19

Skorzystaj ze wzoru dwumianowego oraz ze wzoru $(x^k)' = kx^{k-1}$ do pokazania, że

$$\sum_k k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1} \ .$$

Zadanie 20

Podaj dowody algebraiczne i kombinatoryczne następujących tożsamości:

1. $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$
2. $\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$.

Zadanie 21

Załóżmy, że p jest liczbą pierwszą oraz $1 \leqslant k < p$

1. Pokaż, że $p|\binom{p}{k}$.
2. Pokaż, korzystając z pierwszej części zadania, że jeśli p jest liczbą pierwszą oraz $a, b \in \mathbb{N}$ to $(a+b)^p \equiv (a^p + b^p) \mod p$.
3. Wyprowadź z poprzedniego zadania „Małe Twierdzenie Fermata": jeśli p jest liczbą pierwszą, to $a^p \equiv a \mod p$ dla dowolnej liczby naturalnej a.

Zadanie 22

1. Pokaż, że $x^{\overline{k}} = (-1)^k(-x)^{\underline{k}}$.
2. Pokaż, że $x^{\underline{k}} = (-1)^k(k-x-1)^{\underline{k}}$.
3. Oblicz $n^{\underline{n}}$, $(-1)^{\underline{k}}$, $1^{\overline{n}}$.
4. Oblicz $\binom{-1}{k}$ negując górny indeks.

5. Pokaż, że $\left(\frac{1}{2}\right)^{\underline{n+1}} = (-1)^{n+1}\frac{n!}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}$.
6. Wyznacz $\binom{1/2}{k+1}$.

Zadanie 23

Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $n > 0$. Pokaż, że

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} \ ,$$

Wskazówka: Podziel obie strony równości przez $n!$ i porównaj to co otrzymasz z tożsamością Vandermonda.

Zadanie 24

Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $n > 0$. Pokaż, że

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}} \ .$$

Wskazówka: skorzystaj z poprzednich zadań.

Zadanie 25

Znajdź zwarte postacie następujących sum:

1. $\sum_k \binom{n}{k} k^2$.

   Wskazówka: Wskazówka: skorzystaj z tożsamości $\sum_k \binom{n}{k} k = n \cdot 2^{n-1}$.

2. $\sum_k \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$
3. $\sum_k \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}$
4. $\sum_k \binom{n}{k}^2$.

   Wskazówka: skorzystaj z tożsamości $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n$.

5. $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k}^2$.

   Wskazówka: skorzystaj z tego, że $(1-x^2)^n = (1-x)^n(1+x)^n$.

** Zadanie 26

Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych $k \leqslant n$ mamy

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqslant \binom{n}{k} \leqslant \left(\frac{ne}{k}\right)^k \ .$$

Wskazówka: Pierwsza nierówność jest "łatwa". Przed udowodnieniem drugiej udowodnij najpierw, że $(1+\frac{1}{k})^k \leqslant e$ dla wszystkich $k \geqslant 1$ a potem możesz spróbować przeprowadzić indukcję względem k.

Zadanie 27

Rozważmy równanie

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \ .$$

1. Ile ma rozwiązań to równanie w liczbach naturalnych?
2. Skorzystaj z zasady włączania-wyłączania do wyznaczenia liczby takich rozwiązań tego równania, że $x_1 \leqslant 4$, $x_2 \leqslant 4$ i $x_3 \leqslant 4$.
3. Spróbuj jakoś rozsądnie uogólnić pierwszą część tego zadania.

Zadanie 28

Na wykładzie udowodniliśmy następujące dwa wzory:

$$\sum_{a=0}^{n} \binom{a}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{1}$$

$$\sum_{a=0}^{n} \binom{a+k}{k} = \binom{a+n+1}{n} \tag{2}$$

1. Wyprowadź wzór (2) ze wzoru (1).
   Wskazówka: Zastosuj "górną negację"
2. Niech $S_n^a = \sum_{k=1}^{n} k^a$. Zastosuj wzór (2) do wyprowadzenia zwartych wzorów na S_n^1, S_n^2 i S_n^3.
3. Na wykładzie pokazaliśmy metodą indukcji matematycznej, że $\sum_{k \leqslant a} \binom{n}{k}(-1)^k = (-1)^a \binom{n-1}{a}$. Udowodnij ten wzór dwukrotnie stosując podwójną negację i jeden ze wzorów (2) lub (1).

Zadanie 29

Ustalmy liczby naturalne $a > 0$, b i n. Rozważmy zbiór M wszystkich monotonicznych odwzorowań ze zbioru $[a+b]$ w zbiór $[n+1]$.

1. Pokaż, że $|M| = \binom{n+1}{a+b}$
2. Niech $M_i = \{f \in M : f(a) = i\}$. Wyznacz moce $|M_i|$ dla wszystkich $i \in [n+1]$.
3. Wyprowadź z tego zwarty wzór na sumę $\sum_k \binom{k}{a}\binom{n-k}{b}$.

Zadanie 30

Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami n-krotnie różniczkowalnymi w punkcie x. Przez $h^{(k)}(x)$ oznaczamy k-tą pochodną hunkcji h w punkcie x (przy czym $h^{(0)}(x) = h(x)$). Pokaż, że

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \ .$$

3 Proste metody szacowania

Zadanie 31

Na wykładzie pokazaliśmy, że jeśli $f : [A, B] \to \mathbb{R}$ jest funkcją niemalejącą oraz, że $A, B \in \mathbb{N}$ to

$$f(A) + \int_A^B f(x)dx \leqslant \sum_{k=A}^{B} f(k) \leqslant \int_A^B f(x)dx + f(B)$$

Korzystając z tego zadania pokaż, że jeśli $f : [A, B] \to \mathbb{R}$ jest funkcją nierosnącą oraz, że $A, B \in \mathbb{N}$. Pokaż, że

$$f(A) + \int_A^B f(x)dx \geqslant \sum_{k=A}^{B} f(k) \geqslant \int_A^B f(x)dx + f(B)$$

Zadanie 32

Zastosuj poprzednie zadanie do znalezienia oszacowań dolnych i górnych następujących sum

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^a$ dla $a > 0$
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ dla $a > 1$

Zadanie 33

Pokaż, bez stosowania indukcji matematycznej, że

1. $\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1)$
2. $\sum_{k=1}^{n} kH_k = \frac{1}{4}n(n+1)(2H_{n+1} - 1)$.
3. $\sum_{k=2}^{n} \frac{H_k}{k(k-1)} = 2 - \frac{H_{n+1}}{n} - \frac{1}{n+1}$.
4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = H_{2n} - H_n$

Zadanie 34

Oblicz całkę $\int_0^1 \frac{1-x^{n-1}}{1-x} dx$. Pokaż następnie, że

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \binom{n}{k} .$$

Zadanie 35

Wyznacz sumy $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ i $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$ za pomocą liczb harmonicznych i zbadaj ich asymptotykę.

Zadanie 36

Oblicz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{10^n}$.

Wskazówka: Może przydać Ci się rozwinięcie funkcji $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ w szereg Taylora w punkcie $x = 0$. Przemnóż następnie otrzymany szereg przez szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

4 Liczby Fibonacciego

Zadanie 37

Które liczby Fibonacciego są parzyste? Odpowiedź, oczywiście, uzasadnij.

Zadanie 38

Oblicz $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

Zadanie 39

Oblicz $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{2^n}$.

Zadanie 40

Wyznacz następujące sumy

1. $\sum_{k=0}^{n} F_k$
2. $\sum_{k=0}^{n} F_{2k}$
3. $\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1}$

* Zadanie 41

Pokaż, że $\mathrm{nwd}(F_n, F_m) = F_{\mathrm{nwd}(n,m)}$.
Wskazówka: Skorzystaj z tego, że $\mathrm{nwd}(F_{n+1}, F_n) = 1$.

Zadanie 42

Pokaż, że $F_n | F_{kn}$ dla wszystkich $n, k \geqslant 1$.

Zadanie 43

Liczbami Lukas'a nazywamy elementy ciągu $(L_n)_{n\geqslant 0}$ zdefiniowanego następująco: $L_0 = 2$, $P_1 = 1$ oraz $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$. Wyraź liczby Lukas'a za pomocą liczb Fibonacciego.

Zadanie 44

Liczbami Pellego nazywamy elementy ciągu $(P_n)_{n\geqslant 0}$ zdefiniowanego następująco: $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ oraz $P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$. Wyznacz formułę podobną do formuły Binet'a na liczbę P_n.

5 Liczby specjalne

Zadanie 45

Wyznacz następujące liczby $\left[{3 \atop k}\right]$, $\left[{4 \atop k}\right]$, $\left\{{3 \atop k}\right\}$, $\left\{{4 \atop k}\right\}$ dla wszystkich całkowitych $k \geqslant 0$.

Zadanie 46

Znajdź rozsądną formułę na liczby $\left\{{n \atop 3}\right\}$.

Zadanie 47

Pokaż, że $\left\{ {n \atop n-3} \right\} = \frac{1}{48} n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2$.

Zadanie 48

Pokaż, że $\binom{n}{k-1} \leqslant \left\{ {n \atop k} \right\} \leqslant \binom{n-1}{k-1} k^{n-k}$

Zadanie 49

Niech $Sur(n,k)$ oznacza zbiór wszystkich surjekcji ze zbioru $[n]$ na zbiór $[k]$.

1. Sprawdź, że $|Sur(n,k)| = \left\{ {n \atop k} \right\} k!$.
2. Pokaż, że $\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{a=0}^{k} (-1)^a \binom{k}{a} (k-a)^n$.

Zadanie 50

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną. Niech $h(x) = f(e^x)$. Pokaż, że

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} f^{(k)}(e^x) e^{kx}$$

Zadanie 51

Pokaż, że $B_n < n!$ dla $n \geqslant 3$.

Zadanie 52

Pokaż, że dla $n \geqslant 2$ mamy $n! < \left\{ {2n \atop n} \right\} < (2n)!$

Zadanie 53

Korzystając z tożsamości $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] x^k$ wyprowadź wzór $x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \left[{n \atop k} \right] x^k$.

Zadanie 54

Udowodnij następujące tożsamości:

1. $H_n = \frac{1}{n!} \left[{n+1 \atop 2} \right]$.
2. $\sum_{k=1}^{n} k \left[{n \atop k} \right] = \left[{n+1 \atop 2} \right]$.
3. $\sum_{k=m}^{n} k \left[{n \atop k} \right] \binom{k}{m} = \left[{n+1 \atop m+1} \right]$.
4. $\sum_{k=m}^{n} k \left[{n \atop k} \right] 2^k = (n+1)!$.

Zadanie 55

Pokaż, że

$$B_{n+1} = \sum_{a=0}^{n} \binom{n}{a} B_{n-a}$$

6 Funkcje tworzące i klasy kombinatoryczne

Zadanie 56

Mówimy, że klasy kombinatoryczne $\mathcal{A} = (A, |\cdot|_A)$ oraz $\mathcal{B} = (B, |\cdot|_B)$ są izomorficzne jeśli istnieje bijekcja $f : A \to B$ taka, że $(\forall a \in A)(|a|_A = |f(a)|_B)$.

1. Pokaż, że jeśli klasy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ sa izomorficzne, to $\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)$.
2. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?

Zadanie 57

Znajdź zwarte postacie funkcji tworzących następujących ciągów $a_n = 1$, $b_n = 2^n$, $c_n = 2^n + 3^n$, $d_n = n$.

Zadanie 58

Wyznacz ciągi, których funkcje tworzące wyrażają się wzorami: ciągów

1. $f(x) = \frac{1}{1+x}$,
2. $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$,
3. $h(x) = \frac{x^2}{1-3x}$.

Zadanie 59

Rozważamy ciąg (a_n) zadany równaniem rekurencyjnym

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + n \ .$$

1. Wyznacz funkcję tworzącą tego ciągu.
2. Znajdź zwarty wzór na n-ty wyraz tego ciągu

Zadanie 60

Niech $\mathcal{P} = (P(\{1, 2, \ldots, n\}), |\cdot|)$, gdzie $|A|$ oznacza moc zbioru A. Wyznacz funkcję tworzącą $\mathcal{P}(x)$.

Zadanie 61

Niech L będzie zbiorem wszystkich skończonych ciągów zbudowanych z liter $\{A, G, C, T\}$. Niech $\mathcal{L} = (L, |\cdot|)$, gdzie $|\sigma|$ = długość ciągu σ.

1. Wyznacz $\mathcal{L}(x)$.
2. Wyznacz $[x^n](\mathcal{L} \times \mathcal{L})(x)$ i podaj interpretację kombinatoryczną otrzymanego wyniku.

Zadanie 62

Niech $\mathcal{N}_\varepsilon = (\{\varepsilon\}, |\cdot|)$, gdzie $|\varepsilon| = 0$. Pokaż, że każda klasa kombinatoryczna $\mathcal{A}$ jest izomorficzna z klasą $\mathcal{A} \times \mathcal{N}_\varepsilon$.

Zadanie 63

Niech $\mathcal{A}$ będzie klasą kombinatoryczną. Jakiej klasie odpowiada funkcja tworząca $\frac{1}{2}(\mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(-x))$?.

Zadanie 64

Dlaczego przy konstrukcji klasy SEQ($\mathcal{A}$) zakładaliśmy, że w klasie kombinatorycznej $\mathcal{A}$ nie ma elementów rozmiaru 0?

Zadanie 65

Rozwiń funkcje $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ oraz $g(x) = \frac{x^2}{(1-x)^3}$ w szeregi potęgowe w punkcie $x = 0$. Podaj interpretację kombinatoryczną otrzymanych wyników.
Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru na "'górną negację" dla współczynników dwumianowych.

Zadanie 66

Celem tego zadania jest znalezienie wszystkich ciągów $(a_n)_{n\geqslant 0}$ spełniających zależność

$$(\forall n \geqslant 0)(\sum_{i+j=n} a_i a_j = 1)$$

1. Jaki warości może przyjmować element a_0?
2. Przetłumacz powyższe równanie na równanie dla funkcji tworzącej $A(x) = \sum_n a_n x^n$
3. Rozwiąż to równanie i zakończ zadanie.

Zadanie 67

Niech $\mathcal{A} = (\{a, b\}, |\cdot|)$, gdzie $|a| = 2$ i $|b| = 3$.

1. Wyznacz $\mathcal{A}(x)$, SEQ$(\mathcal{A})(x)$ oraz MULT$(\mathcal{A})(x)$.
2. Wyznacz (w dowolny sposób, na przykład za pomocą programu Mathematica) $[x^{100}]$MULT$(\mathcal{A})(x)$.
3. Niech SEQ$(\mathcal{A})(x) = \sum_n b_n x^n$. Znajdź wzór rekurencyjny na ciąg b_n.
4. (*) Spróbuj wyznaczyć asymptotykę liczb b_n z poprzedniego podzadania.
   Wskazówka: mogą ci się przydać polecenia SeriesCoefficient, FullSimplify, ToRadicals, Abs programu Mathamatica.

Zadanie 68

Niech $\mathcal{A} = (\{a_1, \ldots, a_k\}, |\cdot|)$, gdzie $|a_1| = \ldots = |a_k| = 1$. Wyznacz MULT$(\mathcal{A})(x)$ oraz znajdź wzór na $[x^n]$MULT$(\mathcal{A})(x)$. Porównaj tez wzór ze wzorem z wykładu.

Zadanie 69

Korzystając ze wzoru

$$\text{CYCLE}(\mathcal{A})(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\varphi(n)}{n} \ln \frac{1}{1 - \mathcal{A}(x^n)}$$

odpowiedź na nastepujące pytania:

1. Ile różnych cykli długości 11 można utworzyć z dwóch różnych elementów?
2. Ile różnych cykli długości 11 można utworzyć z trzech różnych elementów?
3. Ile różnych cykli długości 10 można utworzyć z dwóch różnych elementów?

Zadanie 70

Zastosuj wzór na CYCLE($\mathcal{A}$)(x) do klasy kombinatorycznej złożonej z jednego elementu o wadze 1.

1. Wyjaśnij zaobserwowane zjawisko.
2. Podaj możliwie prosty (kilku linijkowy) dowód zaobserwowanego faktu.

Zadanie 71

Ile jest $\{0, 1, 2\}$ – drzew o n wierzchołkach (czyli drzew, w których każdy węzeł ma 0, 1 lub 2 potomków)?

Zadanie 72

Pokaż, że $n + 2$ kąt wypukły posiada C_n rożnych triangulacji (C_n = n-ta liczba Catalana).

Zadanie 73

Pokaż, że $2n$ osób siedzących przy okrągłym stole może uścisnąć sobie dłonie (bez przecięć) na C_n sposobów (C_n = n-ta liczba Catalana).

Zadanie 74

Wyznacz asymptotykę liczb Catalana.

C.D.N.

Jacek Cichoń