Teoria Grafów
Lista zadań

Jacek Cichoń
Politechnika Wrocławska, WIZ

Wrocław • 2021

1 Wstęp do teorii grafów

Zadanie 1

Pokaż, że w każdym grafie prostym o co najmniej dwóch wierzchołkach są dwa wierzchołki o takim samym rzędzie.

Zadanie 2

Niech $G[X, Y]$ będzie prostym grafem dwudzielnym, gdzie $|X| = r$ i $|Y| = s$. Niech n oznacza liczbę wierzchołków zaś m liczbę krawędzi tego grafu.

1. Pokaż, że $m \leqslant rs$
2. Wywnioskuj z tego, że $m \leqslant \frac{1}{4}n^2$

Zadanie 3

Przedstaw zbiory krawędzi grafów K_5 i K_7 jako sumę rozłącznych cykli.

Zadanie 4

Pokaż, że każda ścieżka jest grafem dwudzielny.

Zadanie 5

Pokaż, że graf cykliczny C_n jest grafem dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą.

Zadanie 6

n wymiarową hiperkostką Q_n ($n \geqslant 1$) nazywamy graf którego wierzchołkami są wszystkie ciągi $0-1$ długości n, w którym dwa wierzchołki są połączone jeśli różnią się dokładnie na jednej pozycji.

1. Narysuj grafy Q_1, Q_2, Q_3 i Q_4.
2. Wyznacz liczbę wierzchołków i liczbę krawędzi w grafie Q_n.

3. Wyznacz średnicę i rzędy elementów w Q_n.
4. Pokaż, że Q_n jest dwudzielny dla każdego $n \geqslant 1$.

* Zadanie 7

Niech G będzie grafem prostym. Pokaż, że G jest spójny lub $\overline{G}$ (dopełnienie grafu G) jest spójny. Podaj przykład takiego grafu G,że zarówno G jak i $\overline{G}$ są grafami spójnymi.

* Zadanie 8

Niech $\mathcal{G} = (V, E)$ będzie grafem prostym takim, że $|E| > \binom{|V|-1}{2}$. Pokaż, że $\mathcal{G}$ jest grafem spójny.

Zadanie 9

Pokaż, że grafy Q_2 i $K_{2,2}$ są izomorficzne.

Zadanie 10

Rozważamy dwa grafy o zbiorze wierzchołków $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. W pierwszym grafie wierzchołek i-ty jest połączony z wierzchołkami

$$i - 2, i - 1, i + 1, i + 2$$

za w drugim grafie z wierzchołkami

$$i - 3, i - 1, i + 1, i + 3$$

(modulo 7). Pokaż, że grafy te są izomorficzne.

Zadanie 11

Niech $G = G(X, Y)$ będzie grafem dwudzielnym.

1. Pokaż, że $\sum_{x \in X} \deg(x) = \sum_{y \in Y} \deg(y)$.
   Wskazówka: Możesz zacząć tak:

$$\sum_{x \in X} \deg(x) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} ||\{x, y\} \in E|| = \ldots$$

.

2. Pokaż, że jeśli G jest k-regularny dla jakiegoś $k > 0$, to $|X| = |Y|$.
   Wskazówka: Wystarczy, że sobie przypomnisz co to znaczy, że graf jest regularny i skorzystasz z poprzedniego punktu.

Zadanie 12

Podaj przykład dwóch nieizomorficznych grafów o tym samym ciągu stopni wierzchołków.

Zadanie 13

Rozstrzygnij czy następujące ciągi są graficzne i jeśli ciąg jest graficzny, to znajdź graf prosty o tym ciągu stopni:

1. $(4, 3, 2, 1, 0)$

2. $(4, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$
3. $(6, 4, 4, 4, 3, 1, 1, 1)$

Zadanie 14

Pokaż, że grafy proste G_1 i G_2 są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy ich dopełnienia $\overline{G_1}$ i $\overline{G_2}$ są izomorficzne.
Wskazówka: $\models ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((\neg p) \leftrightarrow (\neg q)))$.

Zadanie 15

Wyznacz wszystkie grafy proste o czterech wierzchołkach z dokładnością do izomorfizmu.

Zadanie 16

Załóżmy, że $G[X, Y]$ jest grafem dwudzielnym takim, że dla każdego $x \in X$ oraz $y \in Y$ mamy $\deg(x) \geqslant \deg(y) > 0)$. Pokaż, że $|X| \leqslant |Y|$.
Wskazówka: Dowód jest dosyć pomysłowy: zauważ, że

$$|X| = \sum_{x \in X} 1 = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} ||\{x, y\} \in E|| \frac{1}{\deg(x)}$$

.

Zadanie 17

Pokaż, że graf $\overline{L(K_5)}$ jest izomorficzny z grafem Petersena.
Wskazówka: Ponumeruj wierzchołki grafu K_5 elementami grupy C_5, czyli liczbami ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Pokaż, że

$$\overline{L(K_5)} \cong ([C_5]^2, \{\{A, B\} : A \cap B = \emptyset\}) \ .$$

Podziel następnie dwuelementowe podzbiory zbioru C_5 na dwie grupy $X = \{\{k, k+1\} : k = 0, \ldots, 4\}$ i $Y = \{\{k, k+2\} : k = 0, \ldots, 4\}$ (działania modulo 5) ułóż je w cykle. Zakończenie jest proste - dorysuj brakujące krawędzie. .

Zadanie 18

Załóżmy, że długość każdego cyklu prostego w danym grafie jest podzielna przez liczbę k. Pokaż, że długość dowolnego cyklu w tym grafie jest podzielna przez liczbę k.
Uwaga: Sprawy terminologiczne: przez **cykl** w grafie $G = (V, E, \phi)$ rozumiemy tutaj ciąg

$$x_0, e_1, x_1 \ldots, e_n, x_n, e_{n+1}, x_{n+1}$$

taki, że $x_{n+1} = x_0$, $\phi(e_i) = \{x_{i-1}, x_i\}$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$ oraz, że $e_i \neq e_j$ dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant n_1$ (czyli bez powtórzonych krawędzi). **Cykl prosty** to jest cykl bez powtórzonych wierzchołków. .
Wskazówka: Załóżmy że dany cykl nie jest prosty. Niech $i = \min\{k : x_k \in \{x_0, \ldots, x_{k-1}\}\}$. Niech $j = \min\{i : x_i = x_j\}$. Pokaż, że $x_j, x_{j+1}, \ldots, x_i, x_j$ jest cyklem prostym. .

Zadanie 19

Produktem kartezjańskim grafów $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ nazywamy graf $G_1 \times G_2$ o zbiorze wierzchołków $V_1 \times V_2$ oraz zbiorze krawędzi

$$E = \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} : (x_1 = x_2 \wedge \{y_1, y_2\} \in E_2) \vee (\{x_1, x_2\} \in E_1 \wedge y_1 = y_2)\}$$

1. Wyznacz grafy $L_3 \times L_4$, $C_2 \times C_5$
2. Wyznacz $\deg((x, y))$ w $G_1 \times G_2$.
3. Wyznacz liczbę krawędzi w grafie $G_1 \times G_2$

Zadanie 20

Niech (V, E) będzie grafem spójnym. Niech $d(x, y)$ oznacza najmniejszą długość drogi od wierzchołka x do y. Pokaż, że (V, d) jest przestrzenią metryczną.

Zadanie 21

Niech G będzie grafem oraz niech $e = \{x, y\}$ będzie krawędzią grafu G. **Elementarny podpodział** krawędzi e polega na dodaniu do zbioru wierzchołków grafu nowego wierzchołka w, dodaniu do zbioru krawędzi $\{x, w\}$ i $\{w, x\}$ oraz usunięciu krawędzi e.

Barycentrycznym podpodziałem grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf otrzymany z grafu G po zastosowaniu operacji elementarnego podpodziału do każdej krawędzi ze zbioru E.

1. Ile wierzchołków ma barycentryczny podpodział grafu G?
2. Ile krawędzi ma barycentryczny podpodział grafu G?
3. Pokaż, że po dwukrotnym zastosowaniu operacji podziału barycentrycznego otrzymujemy graf prosty.

2 Drzewa

Zadanie 22

Załóżmy, że $G = (V, E)$ jest takim grafem prostym, że $|E| \geqslant |V|$. Pokaż, że graf G zawiera cykl.

Zadanie 23

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym. Załóżmy, że $v \in V$ jest wierzchołkiem o stopniu nieparzystym. Pokaż, że istnieje inny wierzchołek $u \in V$ o rzędzie nieparzystym od którego jest jakaś droga od v.
Wskazówka: Zajmij się komponentą spójną grafu G do której należy wierzchołek v.

Zadanie 24

Rozważmy następujący algorytm wyznaczania drzewa rozpinającego spójnego grafu $G = (V, E)$.

- Wybierzmy wierzchołek $a \in V$.
- Dla każdego $x \in V \setminus \{a\}$ wybieramy $y_x \in V$ taki, że $d(a, y_x) = d(a, x) - 1$ oraz, że w grafie G istnieje krawędź e_x od y_x do x

- Kładziemy $T = (V, \{e_x : x \in V \setminus \{a\}\})$

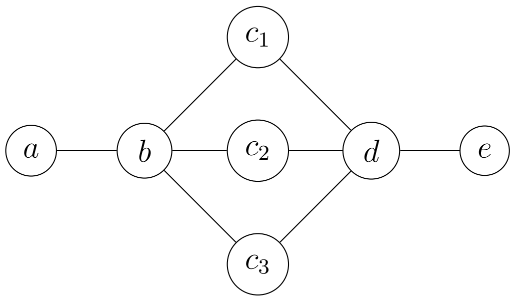
1. Sprawdź tę metodę na kilku przykładach.
2. Pokaż, że jest to poprawna metoda.
   Wskazówka: Aby pokazać poprawność tej metody przyjrzyj się drodze od a do x najkrótszej długości.
3. Pokaż, że graf T jest spójny
4. Pokaż, że T jest drzewem
   Wskazówka: Ile krawędzi ma graf T ?.

Zadanie 25

Wyznacz liczby wszystkich drzew o zbiorach wierzchołków $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ i $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Skorzystaj z serwisu "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences" do postawienia hipotezy o liczbie drzew o zbiorze wierzchołków $\{1, \ldots, n\}$.

Zadanie 26

1. Wyznacz wszystkie grafy rozpinające w następującym grafie:



   Wskazówka: W każdym grafie rozpinającym tego grafu musi być droga od a do e.
2. Uogólnij poprzedni punkt na podobny graf w którym zamiast trzech wierzchołków c_1, c_2, c_3 mamy n wierzchołków $c_1, \ldots, c_n$

Zadanie 27

Wyznacz drzewa rozpinające grafów C_n. Wyznacz kilka drzew rozpinających w grafach W_n, $K_{n,m}$. Spróbuj znaleźć w sieci dokładne wzory na liczbę drzew rozpinających w grafach K_n, W_n, $K_{n,m}$.

Zadanie 28

Niech $\tau(G)$ oznacza liczbę drzew rozpinających grafu spójnego G. Dla krawędzi e grafu G przez G/e rozumiemy kontrakcję grafu G wzdłuż krawędzi e: polega ona na sklejeniu końców krawędzi e w jeden wierzchołek. Dokładniej: jeśli $e = \{x, y\}$, to z grafu G usuwamy wierzchołki x i y, dodajemy nowy wierzchołek v_e i każdą krawędź postaci $\{x, u\}$ oraz $\{y, v\}$ zastępujemy krawędziami $\{v_e, u\}$ i $\{v_e, v\}$.

1. Pokaż, że $\tau(G) = \tau(G \setminus e) + \tau(G/e)$
2. Za pomocą tego wzoru oblicz $\tau(K_{2,4})$

Zadanie 29

Wyznacz liczbę grafów rozpinających w grafach $K_{2,n}$.

Zadanie 30

Niech $\tau(G)$ oznacza liczbę drzew rozpinających grafu spójnego G. Dla krawędzi e grafu G przez G/e rozumiemy kontrakcję grafu G wzdłuż krawędzi e: polega ona na sklejeniu końców krawędzi e w jeden wierzchołek. Dokładniej: jeśli $e = \{x, y\}$, to z grafu G usuwamy wierzchołki x i y, dodajemy nowy wierzchołek v_e i każdą krawędź postaci $\{x, u\}$ oraz $\{y, v\}$ zastępujemy krawędziami $\{v_e, u\}$ i $\{v_e, v\}$.

1. Pokaż, że $\tau(G) = \tau(G \setminus e) + \tau(G/e)$
2. Za pomocą tego wzoru oblicz $\tau(K_{2,4})$

Zadanie 31

Niech T będzie drzewem. Pokaż, że $\bar{d}(T) \leqslant 2$.

Zadanie 32

Pokaż, że $\delta(G) \leqslant \bar{d}(G) \leqslant \Delta(G)$ dla dowolnego grafu G.
Uwaga: $\bar{d}(G)$ oznacza średni stopień wierzchołka.

Zadanie 33

Pokaż, że w każdym spójnym grafie prostym o dwóch lub więcej wierzchołkach istnieją co najmniej dwa nierozcinające wierzchołki.
Uwaga: Wierzchołek x nazywamy nierozcinającym jeśli jego usunięcie nie zwiększa liczby składowych spójnych grafu.
Wskazówka: Sprawdź, że teza jest prawdziwa dla grafów o 2 oraz 3 wierzchołkach. Zastosuj indukcję matematyczną $n \to n + 1$ startując od n=3; będziesz miał do rozważenie kilka przypadków. Możesz też (alternatywny dowód) skorzystać z pewnej własności drzew..

* Zadanie 34

Załóżmy, że spójny graf prosty ma dokładnie dwa nierozcinające wierzchołki. Pokaż, że jest to graf liniowy.

Zadanie 35

W dodatku A znajduje się kod prostej klasy języka Python implementującą graf prosty.

1. Dodaj do taj klasy metody służące do wyznaczania $\delta(G)$, $\bar{d}(G)$ oraz $\Delta(G)$
2. Dodaj do tej klasy metodę `ecc` która służy do obliczania ekscentryczności wierzchołka
3. Dodaj do tej klasy metodę służącą do wyznaczania promienia i średnicy grafu.

Zadanie 36

Do klasy z dodatku A dodaj metodę służącą do wyznaczania drzewa rozpinającego grafu.

Zadanie 37

Szponem (claw) nazywamy graf $K_{1,3}$. Niech $\mathcal{G}$ będzie dowolnym grafem prostym oraz niech $\mathcal{L} = L(\mathcal{G})$ będzie grafem liniowym grafu $\mathcal{G}$. Pokaż, że nie istnieje podzbiór X wierzchołków $\mathcal{L}$ taki, że graf $\mathcal{L}[X]$ jest izomorficzny ze szponem. Czyli: masz pokazać, że grafy liniowe nie zawierają szponów.
Uwaga: Dla grafu $\mathcal{H} = (H, E)$ i $X \subseteq H$ kładziemy $\mathcal{H}[X] = (X, E \cap [X]^2)$.

Zadanie 38

Niech (X, E) będzie grafem dwudzielnym. Pokaż, że $|E| \leqslant |X|^2/4$.

3 Grafy eulerowskie i ścieżki Hamiltona

Zadanie 39

1. Dla jakich n grafy K_n są eulerowskie; dla jakich n są one hamiltonowskie?
2. Dla jakich par liczb n, m grafy $K_{n,m}$ są eulerowskie lub zawierają ścieżką Eulera?
3. Dla jakich par liczb n, m grafy $K_{n,m}$ są hamitonowskie lub zawierają ścieżką Hamiltona?

Zadanie 40

1. Czy graf Petersena jest grafem Eulera?
2. Wyznacz długości cykli prostych w grafie Petersena.
   Wskazówka: Wystarczy przyjrzeć się cyklom zaczynającym się jednego ustalonego wierzchołka.
3. Pokaż, że graf Petersena zawiera ścieżkę Hamiltona.
4. Załóż, że $x_0, \ldots, x_9$ jest cyklem Hamiltona w grafie Petersena. Zauważ, że na cyklu tym występuje 10 krawędzi. W grafie mamy więc 5 niewykorzystanych krawędzi. Pokaż, że nie mogą to być krawędzie $\{\{x_i, x_{i+5}\} : i = 0, \ldots, 4\}$.
   Wskazówka: Skorzystaj z tego, że w grafie tym nie cykli długości 4.
5. Wywnioskuj z tego, że graf Petersena nie jest hamiltonowski, czyli, że nia zawiera cyklu Hamiltona.
   Wskazówka: Ponownie skorzystaj z tego, że w grafie tym nie cykli długości 4.

Zadanie 41

Podaj przykład spójnego grafu prostego o $n \geqslant 3$ wierzchołkach który nie jest hamiltonowski, a dla którego mamy $\deg(x) + deg(y) \geqslant n - 1$ dla każdej pary nieincydentnych wierzchołków.
Wskazówka: Poszukaj najpierw grafu o możliwie małej liczbie wierzchołków, a potem spróbuj znaleźć przykład dla dowolnego n.
Uwaga: Przykład ten pokazuje, że w twierdzeniu Ore nie można zamienić warunku $\deg(x) + deg(y) \geqslant n$ warunkiem $\deg(x) + deg(y) \geqslant n - 1$.

Zadanie 42

Załóżmy, że $n \geqslant 3$, $A, B \subseteq \{2, \ldots, n-1\}$ są zbiorami niepustymi oraz $|A| + |B| \geqslant n$. Pokaż, że istnieje $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ takie, że $i \in B$ oraz $i + 1 \in A$.

Uwaga: Ten fakt jest wykorzystywany w dowodzie twierdzenia Ore.
Wskazówka: Zacznij od pokazania, że dla dowolnych zbiorów skończonych X i Y mamy $|X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y|$.
Wskazówka: Zastosuj poprzedni wzór do zbiorów $X = \{a - 1 : a \in A\}$ i $Y = B$.

4 Grafy planarne

Zadanie 43

Załóżmy, że graf G_1 jest pod-grafem grafu G_2 (czyli $V(G_1) \subseteq V(G_2)$ oraz $E(G_1) \subseteq E(G_2)$).

1. Pokaż, że jeśli G_2 jest planarny to i G_1 jest planarny
2. Pokaż, że jeśli G_1 nie jest planarny to i G_2 nie jest planarny

Zadanie 44

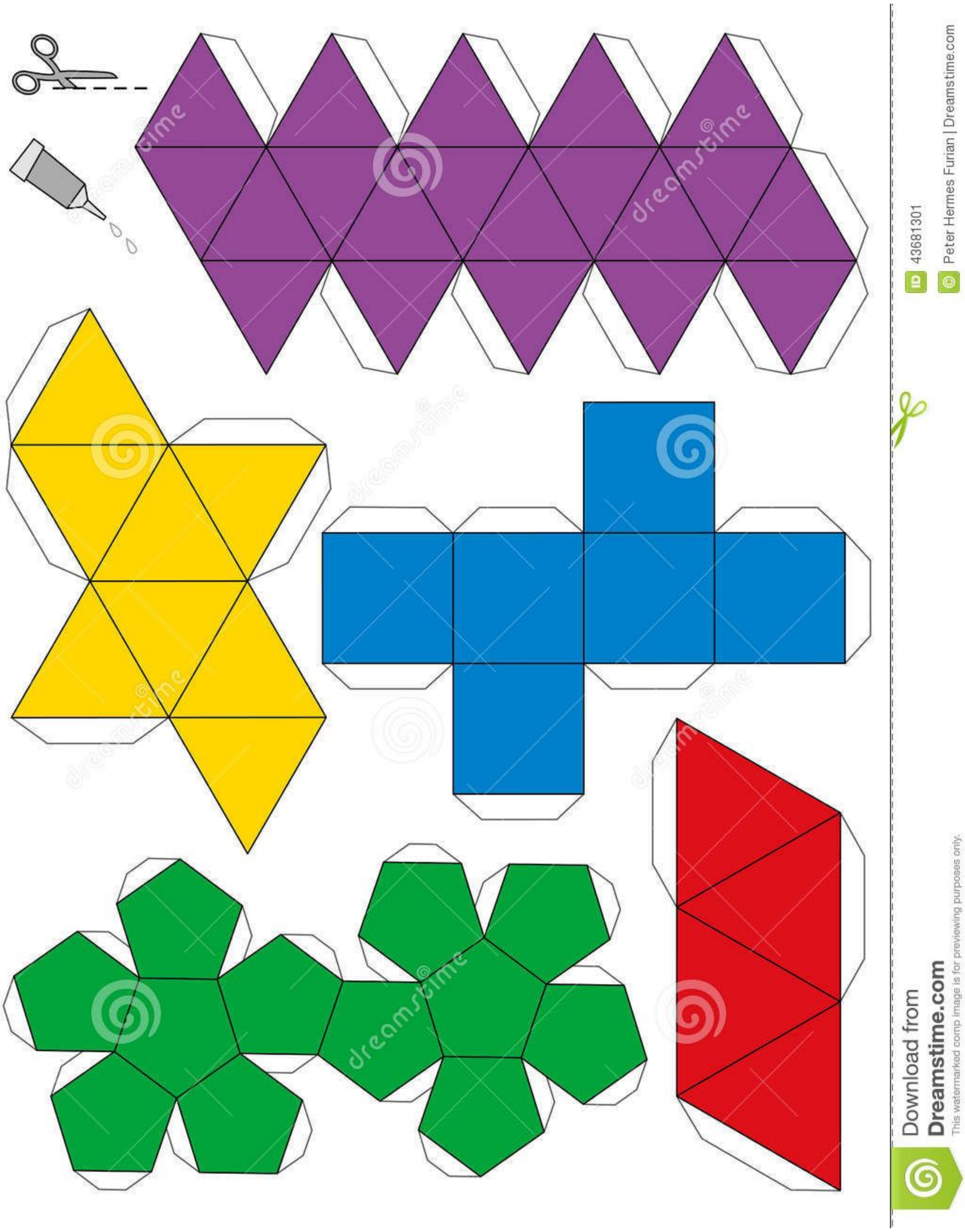
Dla jakich n hiper-kostki Q_n są planarne ?
Wskazówka: Pokaż, że jeśli $x, y, z \in Q_n$ i $d(x, y) = d(y, z) = 1$ to $x = z$ lub $d(x, z) = 2$.
Wskazówka: Pokaż, że w grafie Q_4 nie ma trójkątów i skorzystaj z przedostatniego twierdzenia z wykładu z dnia 01.04.2020.

Zadanie 45

Przedstaw grafy $K_{3,3}$ i K_5 jako grafy na płaszczyźnie z minimalną liczbą przecięć.

Zadanie 46 Zadanie świąteczne

Zaopatrz się w brystol, wytnij na podstawie następującego rysunku



szablony brył platońskich i sklej je.

Zadanie 47

Pokaż, że graf Petersena nie jest planarny.
Wskazówka: Usuń dwie "poziome" krawędzie i skorzystaj z twierdzenia Kuratowskiego.

Zadanie 48

Narysuj na płaszczyźnie graf Petersena tak aby na rysunku były tylko dwa przecięcia krawędzi.

Zadanie 49

Pokaż, że dowolny graf skończony jest izomorficzny z grafem którego wierzchołki są punktami przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zaś krawędzie są łukami w $\mathbb{R}^3$ łączącymi wierzchołki które nie mają przecięć poza (ewentulanie) punktami początkowymi lub końcowymi łuków.
Wskazówka: Umieśćmy punkty grafu na osi OX (czyli na zbiorze punktów $\{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\}$). Załóżmy, że rozważany graf ma m krawędzi. Ustalmy ciąg $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m < 2\pi$. Rozważmy wektory $\bar{v}_i = (0, \cos(\alpha_i), \sin(\alpha_i))$. Niech Π_i będzie płaszczyzną prostopadłą do wektora $\bar{v}_i$, czyli

$$\Pi_i = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y\cos(\alpha_i) + z\sin(\alpha_i) = 0\} \ .$$

Umieść i-tą krawędź na płaszczyźnie Π_i tak aby jedynymi punktami tej krawędzi z osią OX były końce krawędzi .

** Zadanie 50

Niech $P_k = (k, k^2, k^3)$. Pokaż, że umieszczając wierzchołki grafu prostego w punktach $P_1, \ldots, P_n$ można go narysować bez przecięć tak, że każda krawędź jest odcinkiem.
Wskazówka: Równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ i $C = (x_3, y_3, z_3)$ jest dane równaniem

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Przypomnij sobie również pojęcie wyznacznika Vandermonda.

Zadanie 51

Pokaż, że każde drzewo jest planarne.
Wskazówka: To jest proste ćwiczenie na indukcję matematyczną; indukcję zrób po liczbie wierzchołków.

5 Spójność

Przypomnienie oznaczeń:

- $\delta(G) = \min\{\deg(x) : x \in V(G)\}$
- $\kappa(G) = \min\{|X| : X \subset V(G) \wedge G \setminus X$ nie jest spójny$\}$ lub $|V(G)| - 1$ jeśli nie ma takiego zbioru X
- $\lambda(G) = \min\{|Y| : Y \subset E(G) \wedge G \setminus Y$ nie jest spójny$\}$

Zadanie 52

Wyznacz liczby $\kappa(G)$, $\lambda(G)$ i $\delta(G)$ dla grafów K_n, L_n oraz W_n (dla wszystkich n).

Zadanie 53

Pokaż, że dla dowolnego spójnego grafu prostego mamy $\lambda(G) \leqslant \delta(G)$.

Zadanie 54

Podaj przykład spójnego grafu prostego G dla którego $\kappa(G) < \lambda(G) < \delta(G)$.

Zadanie 55

Załóżmy, że $\lambda(G) = k > 0$. Pokaż, że jest rozbicie $\{U, V\}$ zbioru wierzchołków grafu G takie, że jest dokładnie k krawędzi z jednym końcem w zbiorze U i drugim w zbiorze V.

Zadanie 56

Wyznacz liczby $\kappa(K_{n,m})$ i $\lambda(K_{n,m})$ dla dowolnych $n, m \geqslant 1$.
Wskazówka: *Możesz skorzystać z twierdzenia Mengera dla odpowiednio zmodyfikowanego grafu $K_{n,m}$.*

Zadanie 57

Załóżmy, że graf G jest k-spójny (czyli $|V(G)| > k$ oraz żaden zbiór wierzchołków X taki, że $|X| < k$ nie rozpójnia grafu G. Niech x będzie jakimś elementem spoza $V(G)$ oraz niech $A \subseteq V(G)$ będzie zbiorem mocy k. Rozważmy graf

$$G' = (V(G) \cup \{x\}, E(G) \cup \{\{x, a\} : a \in A\}) \ .$$

Pokaż, że graf G' jest również k-spójny.

Zadanie 58

Niech G będzie spójnym grafem w którym wszystkie wierzchołki maja rząd parzysty. Pokaż, że $\lambda(G) \geqslant 2$ (czyli, że usunięcie dowolnej krawędzi nie rozspójnia grafu.
Wskazówka: *Użyj jednego z twierdzeń Eulera.*

Zadanie 59

Załóżmy, że graf G jest k-spójny (czyli $|V(G)| > k$ oraz żaden zbiór wierzchołków X taki, że $|X| < k$ nie rozpójnia grafu G. Niech x będzie jakimś elementem spoza $V(G)$ oraz niech $A \subseteq V(G)$ będzie zbiorem mocy k. Rozważmy graf

$$G' = (V(G) \cup \{x\}, E(G) \cup \{\{x, a\} : a \in A\}) \ .$$

Pokaż, że graf G' jest również k-spójny.

5.1 Skojarzenia

Zadanie 60

Podzielmy w dowolny sposób talię 52 kart na 13 grup po 4 karty. Pokaż, że z każdej z tych grup można wybrać po jednej karcie w taki sposób aby otrzymać zestaw 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, W, K, D, A (nie ważne jakiego koloru).
Wskazówka: *Wymodeluj ten problem za pomocą grafu dwudzielnego. Jeden ze zbiorów rozbicia użyj do reprezentowania grup a drugi do rodzaju karty. Pokaż następnie, że do tego grafu możesz zastosować twierdzenie Hall'a.*

Zadanie 61

Pokaż, że drzewo może mieć co najwyżej jedno doskonałe skojarzenie.
Wskazówka: Zastosuj indukcję. W kroku indukcyjnym przyjrzyj się liściowi; usuń go, wraz z wierzchołkiem incydentnym i zastosuj założenie indukcyjne do drzew składających się z otrzymanego lasu.

Zadanie 62 Twierdzenie Waerdena

Niech $|S| = n \cdot m$. Niech $\{A_1, \ldots, A_n\}$ i $\{B_1, \ldots, B_n\}$ będą rozbiciami zbioru S na zbiory mocy m. Pokaż, że istnieją parami różne $a_1, \ldots, a_n$ oraz permutacja ϕ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ takie, że

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\})(a_i \in A_i \cap B_{\pi(i)|}) \ .$$

Wskazówka: Zdefiniuj graf dwudzielny o rozbiciu $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ o krawędziach

$$E = \{\{x_i, y_j\} : A_i \cap B_j \neq \emptyset\} \ ,$$

pokaż, że spełnia on założenia twierdzenia Hall'a i następnie zastosuj to twierdzenie .

Zadanie 63 Twierdzenie Erdős–Szekeres'a

1. Podaj przykład różnowartościowego ciągu długości $(3-1)(3-1)$ bez malejących ani rosnących podciągów długości 3
2. Podaj przykład różnowartościowego ciągu długości $(5-1)(5-1)$ bez malejących ani rosnących podciągów długości 5

Zadanie 64 Kombinatoryczna wersja twierdzenia Hall'a

Niech $S = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ bedzie ciągiem zbiorów. Transwersalą tego ciągu zbiorów nazywamy ciąg $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ parami różnych elementów taki, że $s_i \in S_i$ dla każdego $i = 1, \ldots, m$. Pokaż, że rodzina S ma transwersalę wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall T \subseteq \{1, \ldots, m\})(|\bigcup_{t \in T} S_t| \geqslant |T|) \ .$$

Wskazówka: Zbuduj odpowiedni graf dwudzielny.

Zadanie 65 Twierdzenie König'a o małżeństwach

Pokaż, że każdy dwudzielny i regularny graf ma doskonałe skojarzenie.
Wskazówka: Załóżmy, że $G = G(X, Y)$ oraz, że graf jest r - regularny ($r \geqslant 1$). Niech $E[Z] = \{e \in E(G) : Z \cap e \neq \emptyset\}$ dla dowolnego zbioru wierzchołków Z. Pokaż, że (1) dla dowolnego $A \subseteq X$ mamy $E[A] = r|A|$, (2) $E[A] \subseteq E[\mathcal{N}(A)]$ (3) $B \subseteq Y$ mamy $E[B] = r|B|$ i następnie połącz te fakty.

Zadanie 66

Grupa złożona ze 100 studentów ma uczestniczyć w egzaminach ustnych. Zespół egzaminacyjny składa się z 25 osób. Każdy student ma być przepytany przez jedną osobę z zespołu egzaminacyjnego. Wiadomo, że każdy ma co najmniej 10 ulubionych osób. Pokaż, że można ustawić sesję egzaminacyjną tak, aby (1) każdy student przepytany był przez ulubioną przez niego osobę (2) każdy egzaminator przepyta co najwyżej 10 studentów.
Wskazówka: Zamiast rozważać 25 osobową komisję rozważ zbiór 250 slotów czasowych (po dziesięć slotów dla każdego członka komisji).

Zadanie 67

Niech $G = G(X, Y)$ będzie grafem dwudzielnym takim, że $|X| = |Y| = n$ oraz $\delta(G) \geqslant \frac{1}{2}n$. Pokaż, że graf G ma doskonałe skojarzenie.
Wskazówka: Rozważ oddzielnie dwa przypadki dla $A \subseteq X$: (1) $|A| \leqslant \frac{1}{2}n$ (2) $|A| > \frac{1}{2}n$.

Zadanie 68

Pewna obca rasa ma trzy płcie: męską, żeńską i ooloi. Małżeństwo w tej rasie składa się z trzech osób, po jednej z każdej płci, które lubią się nawzajem. Każda osoba może należeć do co najwyżej jednego (potrójnego) małżeństwa. Specyficzną cechą tej rasy jest to, że uczucia są zawsze wzajemne - jeśli x lubi y, to wtedy y lubi x.

Rasa ta wysyła wyprawę w celu kolonizacji planety. Wyprawa ma n mężczyzn, n kobiet i n ooloi. Wiadomo, że każdy członek wyprawy lubi co najmniej k osób z obu pozostałych płci.

Pokaż, że jeśli $k \geqslant \frac{3}{4}n$, to zawsze można utworzyć n rozłącznego trójek małżeńskich, żeniąc w ten sposób wszystkich członków wyprawy.
Wskazówka: Ożeń najpierw mężczyzn z kobietami a potem ożenione dwójki ożeń z ooloiami. W drugiej części rozumowania skorzystaj z równości $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.

Zadanie 69 Problem haremu

Załóżmy, że każdy dziewczyna ze zbioru D chce poślubić pewną liczbę ukochanych (tzn. dla każdego $d \in D$ mamy określą liczbę $x_d \geqslant 1$ wymaganych małżonków). Każdy chłopiec może poślubić co najwyżej jedną dziewczynę. Sformułuj warunek konieczny i wystarczający na to aby problem haremu miał rozwiązanie.
Wskazówka: Zastąp każdą dziewczynę odpowiednią liczbą jej klonów.

Zadanie 70

Niech $X_{m,n} = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ $(n, m \geqslant 1)$. Na zbiorze określamy relację wzorem

$$(x, y) \preceq (x', y') \leftrightarrow (x \leqslant x') \wedge (y \leqslant y')$$

Wyznacz największą moc antyłańcucha w częściowym porządku $(X_{m,n}, \preceq)$.

Zadanie 71

Wysokością częściowego porządku $\mathcal{P} = (X, \preceq)$ nazywamy największą długość łańcucha w $\mathcal{P}$. Liczbę tę oznaczamy przez $height(\mathcal{P})$. **Szerokością** $\mathcal{P}$ nazywamy moc największego antyłańcucha w $\mathcal{P}$. Liczbę tę oznaczamy przez $width(\mathcal{P})$.

1. Pokaż, że jeśli $|X| > m \cdot n$ to $height(\mathcal{P}) \geqslant m + 1$ lub $width(\mathcal{P}) \geqslant n + 1$.
2. Niech $|X| = n$. Pokaż, że $height(\mathcal{P}) \geqslant \left\lfloor \sqrt{n-1} \right\rfloor + 1$ lub $width(\mathcal{P}) \geqslant \left\lfloor \sqrt{n-1} \right\rfloor + 1$

Zadanie 72

Niech $X \subseteq \mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ będzie zbiorem o co najmniej 5 elementach. Pokaż, że istnieją w nim trzy liczby $x < y < z$ takie $x|y$ i $y|z$ lub istnieje trójka liczb $x < y < z$ które nie dzielą się nawzajem.

Zadanie 73

Niech $\mathcal{P} = (\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+, \preceq)$, gdzie

$$(x, y) \preceq (a, b) \leftrightarrow ((x \leqslant a) \wedge (y \leqslant b)) \ .$$

1. Pokaż, że porządek $\mathcal{P}$ nie ma nieskończonych antyłańcuchów.
   Wskazówka: Załóż, że A jest nieskończonym antyłańcuchem. Zauważ, że jeśli $(a_1, b_1) \in A$, $(a_2, b_2) \in A$ oraz $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ to $a_1 \neq a_2$. Wywnioskuj z tego, że zbiór $\{a : (\exists b)(a, b) \in A\}$ jest nieskończony.
2. Pokaż, że porządku $\mathcal{P}$ nie można rozbić na skończenie wiele łańcuchów.
   Wskazówka: Zauważ, że jeśli L jest łańcuchem oraz A jest antyłańcuchem to $|A \cap L| \leqslant 1$. Popatrz na zbiór $\{(n, 1), (n - 1, 2), \ldots, (2, n - 1), (1, n)\}$.

Zadanie 74

Ustalmy liczbę naturalną N. Znajdź w częściowym porządku $(\{1, 2, \ldots, N\}, |)$ (symbol $|$ oznacza relację podzielności) łańcuch o największej długości.

Zadanie 75 Dualne twierdzenie Dilworth'a

Niech $\mathcal{P} = (X, \preceq)$ będzie skończonym częściowym porządkiem.

1. Niech $L \subseteq X$ będzie łańcuchem w $\mathcal{P}$. Niech $\mathcal{A}$ będzie rozbiciem X na antyłańcuchy. Pokaż, że $|L| \leqslant |\mathcal{A}|$.
   Wskazówka: Zauważ, że jeśli L jest łańcuchem oraz A jest antyłańcuchem to $|A \cap L| \leqslant 1$.
2. Dla $x \in X$ definiujemy liczbę $N(x)$ jako największą długość łańcucha w $\mathcal{P}$ którego największym elementem jest x. Pokaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n zbiór $N^{-1}(\{n\})$ jest antyłańcuchem w $\mathcal{P}$.
3. (Twierdzenie Mirsky'ego - czyli dualne twierdzenie Dilworth'a) Pokaż, że $height(\mathcal{P})$ jest równa mocy najmniejszego rozbicia $\mathcal{P}$ na antyłańcuchy.

Zadanie 76

Ustalmy liczbę naturalną N. Znajdź rozbicie częściowego porządku $(\{1, 2, \ldots, N\}, |)$ o najmniejszej mocy na antyłańcuchy.

A Simple Graph

Prosty kod w języku Python implementujący graf prosty. Krawędzie są implementowane za pomocą słownika, którego kluczami są wierzchołki zaś wartościami są listy sąsiadów, np.

Listing 1: klasa SimpleGraph i przykład użycia

```
class SimpleGraph(object):

    def __init__(self):
        self.vertex_nbh = {}

    def vertices(self):
```

```
        """ zwraca wierzcholki grafu """
        return list(self.vertex_nbh.keys())

    def edges(self):
        """ zwraca krawedzie grafu """
        edges = []
        for x in self.vertex_nbh:
            for y in self.vertex_nbh[x]:
                if {y, x} not in edges:
                    edges.append({x, y})
        return edges

    def add_vertex(self, x):
        """ Jesli "vertex" nie jest w self.vertex_nbh to
            klucz "vertex" z pusta lista sasiadow jest dodany
            do slownika.
            W przeciwnym przypadku nic sie nie dzieje.
        """
        if x not in self.vertex_nbh:
            self.vertex_nbh[x] = []

    def _add_edge(self, x, y):
        if x in self.vertex_nbh:
            if y not in self.vertex_nbh[x]:
                self.vertex_nbh[x].append(y)
        else:
            self.vertex_nbh[x] = [y]

    def add_edge(self, x, y):
        self._add_edge(x, y)
        self._add_edge(y, x)

    def neighbors(self, v):
        return self.vertex_nbh[v]

if __name__ == "__main__":

    graph = SimpleGraph()
    graph.add_edge("a", "b")
    graph.add_edge("a", "c")
    graph.add_edge("a", "d")
    graph.add_edge("b", "a")
    graph.add_edge("c", "a")
    graph.add_edge("c", "d")
    graph.add_edge("d", "a")
    graph.add_edge("d", "c")
    graph.add_edge("d", "e")
    graph.add_vertex("f")
```

```
print("Vertices of graph:")
print(graph.vertices())

print("Edges of graph:")
print(graph.edges())
```

C.D.N.

Powodzenia
Jacek Cichoń