Egzamin z LiSF
termin pierwszy
07.02.2022

Pierwszy przesłany dokument (możecie przysłać kilka plików) ma zawierać (na górze strony) następujące informacje:

1. imię i nazwisko
2. numer indeksu
3. imię i nazwisko osoby z którą mieliście ćwiczenia
4. ocena z ćwiczeń (lub znak zapytania jeśli jej nie znacie)

Jeśli Twój numer indeksu kończy się liczbą parzystą, to masz do rozwiązania zadania 2, 4, 6 a jeśli kończy się liczbą nieparzystą to masz do rozwiązania zadania 1, 3, 5. Nie rozwiązuj innych zadań - nie będą one oceniane. Jeśli chcesz się postarać o ocenę 5.5 to rozwiąż dodatkowo zadanie 7.

Wszystkie odpowiedzi wymagają uzasadnienia. Oceniana będzie ich jakość. Zadania będą oceniane w skali $\{0, 1, 2\}$. Aby zdać egzamin musisz zdobyć 3 punkty. Jeśli w jakimś zadaniu będziesz musiał skorzystać z Aksjomatu Wyboru, to możesz z niego skorzystać nawet bez zaznaczania tego.

Zadanie 1 *Ile jest waluacji* $\pi : \{p_1, p_2, \ldots, p_{3n}\} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ *takich, że* $\pi(\psi) = \mathbf{1}$*, gdzie*

$$\psi = (p_1 \to (p_2 \vee p_3)) \wedge (p_4 \to (p_5 \vee p_6)) \wedge \ldots \wedge (p_{3n-2} \to (p_{3n-1} \vee p_{3n})) \ ?$$

Zadanie 2 *Ile jest waluacji* $\pi : \{p_1, p_2, \ldots, p_{3n}\} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ *takich, że* $\pi(\psi) = \mathbf{1}$*, gdzie*

$$\psi = (p_1 \leftrightarrow (p_2 \vee p_3)) \wedge (p_4 \leftrightarrow (p_5 \vee p_6)) \wedge \ldots \wedge (p_{3n-2} \leftrightarrow (p_{3n-1} \vee p_{3n})) \ ?$$

Zadanie 3 *Pokaż, że dla dowolnej rodziny zbiorów* $\mathcal{A}$ *mamy*

$$\bigcup\{P(X) : X \in \mathcal{A}\} \subseteq P\left(\bigcup \mathcal{A}\right) .$$

Czy inkluzję w powyższej formule można zastąpić równością?

Zadanie 4 *Pokaż, że dla dowolnej niepustej rodziny zbiorów* $\mathcal{A}$ *mamy*

$$\bigcap\{P(X) : X \in \mathcal{A}\} \subseteq P\left(\bigcap \mathcal{A}\right) .$$

Czy inkluzję w powyższej formule można zastąpić równością?

Zadanie 5 *Wyznacz moc zbioru*

$$\{(A, B) \in P(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{Q}) : |A \setminus B| \leqslant \aleph_0\} .$$

Zadanie 6 *Na zbiorze* $\mathbb{R}^2$ *określamy relację równoważności* $\sim$ *wzorem*

$$((a_1, a_2) \sim (b_1, b_2)) \equiv (a_1^2 + b_2 = b_1^2 + a_2) \ .$$

Niech $\Omega = \mathbb{R}^2/\sim$ *będzie zbiorem wszystkich klas abstrakcji relacji* $\sim$.

1. *Wyznacz* $|\Omega|$.
2. *Podaj przykład selektora rodziny* Ω.
3. *Wyznacz moc zbioru wszystkich selektorów rodziny* Ω

Zadanie 7 (Na ocenę 5.5) *Niech* $c : \mathbb{R}^2 \to \{0, 1\}$.

1. *Pokaż, że istnieją punkty* $P, Q \in \mathbb{R}^2$ *takie, że odległość między* P *i* Q *jest równa 1 oraz* $C(P) = c(Q)$.
2. *Czy zadanie to jest prawdziwe jeśli zastąpimy* $\mathbb{R}^2$ *przez* $\mathbb{R}$ *?*