Egzamin z LiSF

termin pierwszy

06.02.2020

Zadanie 1 *Ile jest waluacji* $\pi : \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ *takich, że* $eval(\psi, \pi) = \mathbf{1}$*, gdzie*

$$\psi = (p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \to p_n) \ ?$$

Rozwiązanie Każdą waluacje $\pi : \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ utożsamiać będziemy z ciagiem $\bar{\pi}$ wartości logicznych $(\pi(p_1), \ldots, \pi(p_n))$.

Zauważmy, że jeśli $\bar{\pi} = (\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$ to $eval(\psi, \pi) = \mathbf{1}$. Zauważmy również, że jeśli $eval(\psi, \pi) = \mathbf{1}$, $1 \leqslant i < n$ oraz $\pi(p_i) = \mathbf{1}$ to $\pi(p_{i+1}) = \mathbf{1}$.

Ponadto dla każdej walucji π o ciągu wartości $\bar{\pi} = (\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1})$ mamy $eval(\psi, \pi) = \mathbf{1}$. Zatem istnieje $n + 1$ waluacji π takich, że $eval(\psi, \pi) = \mathbf{1}$.

Zadanie 2 *Wyznacz moc następującego zbioru*

$$\{(A, B) \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) : |A \cup B| \leqslant \aleph_0\} \ .$$

Rozwiązanie Niech $Z = \{(A, B) \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) : |A \cup B| \leqslant \aleph_0\}$. Oczywiście $Z \subseteq P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N})$. Jeśli $(A, B) \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N})$, to $A \subseteq \mathbb{N}$ i $B \subseteq \mathbb{N}$, więc $A \cup B \subseteq \mathbb{N}$, więc $|A \cup B| \leqslant \aleph_0$, zatem $Z = P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N})$. Tak więc

$$|Z| = |P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c} \ .$$

Zadanie 3 *Niech* $\mathcal{X} = (\mathbb{N} \backslash \{0\}, \preceq)$*, gdzie* $a \preceq b \equiv (a|b)$*. Zbiór* $A \subseteq \mathcal{X}$ *nazywamy antyłańcuchem jeśli*

$$(\forall x, y \in A)(x \neq y \to ((\neg(x \preceq y) \wedge \neg(y \preceq x)))$$

Wyznacz moc zbioru wszystkich antyłańcuchów w częściowym porządku $\mathcal{X}$*.*

Rozwiązanie Niech $\mathcal{A}$ oznacza rodzinę wszystkich anyłańcuchów w $\mathcal{X}$. Z tego, że $\mathcal{A} \subseteq P(\mathbb{N} \setminus \{0\})$ wynika, że $|\mathcal{A}| \leqslant 2^{\aleph_0}$. Niech $\mathbb{P}$ oznacza zbiór wszystkich liczb pierwszych. Wiemy, że $|\mathbb{P}| = \aleph_0$. Każdy podzbiór zbioru $\mathbb{P}$ jest antyłańcuchem w $\mathcal{X}$. Zatem $P(\mathbb{P}) \subseteq \mathcal{A}$. Tak więc

$$2^{\aleph_0} = |P(\mathbb{P})| \leqslant |\mathcal{A}| \leqslant 2^{\aleph_0} \ .$$

Z twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika, że $|\mathcal{A}| = 2^{\aleph_0}$.

Zadanie 4 *Niech* $A_n = \{\frac{k}{n+1} : k \in \mathbb{N} \wedge 0 \leqslant k \leqslant n\}$*. Oblicz* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geqslant n} A_m$*.*

Rozwiązanie Zauważmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $A_n \subseteq [0,1) \cap \mathbb{Q}$. Zatem

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geqslant n} A_m \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geqslant n} ([0,1)\cap\mathbb{Q}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} ([0,1)\cap\mathbb{Q}) = [0,1)\cap\mathbb{Q} \ .$$

Weźmy dowolną liczbę $x \in [0,1)\cap\mathbb{Q}$. Ustalmy liczby naturalne p,q takie, że $0 \leqslant p < q$ i $x = \frac{p}{q}$. Wtedy dla dowolnej liczby naturalnej $k > 0$ mamy $x = \frac{kp}{kq} \in A_{kq-1}$. Zbiór $\{kq-1 : k \geqslant 1\}$ jest nieograniczony w $\mathbb{N}$. Zatem $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geqslant n} A_m$. Tak więc

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geqslant n} A_m = [0,1)\cap\mathbb{Q} \ .$$

Zadanie 5 *Na zbiorze $\mathbb{R}^2$ określamy relację równoważności $\sim$wzorem*

$$((a,b) \sim (x,y)) \equiv (\exists t > 0)((a,b) = (tx,ty)) \ .$$

Niech $I = \mathbb{R}^2/\sim$ będzie zbiorem wszystkich klas abstrakcji relacji $\sim$.

1. *Wyznacz $|I|$.*
2. *Podaj przykład selektora rodziny I.*
3. *Wyznacz moc zbioru wszystkich selektorów rodziny I*

Rozwiązanie Klasami abstrakcji są zbiór $\{(0,0)\}$ oraz półproste o końcu $(0,0)$ bez punktu $(0,0)$. Przykładem selektora jest zbiór

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\} \ .$$

Zatem $|I| = |S| = 2^{\aleph_0}$. Każdy selektor rodziny I jest postaci

$$S_f = \{(0,0)\} \cup \{f(t)(\cos(t), \sin(t) : t \in [0,2\pi\}$$

gdzie f jest dowolną funkcją z $(0,\infty)^{[0,2\pi)}$ (z każdej połprostej wybieramy jeden punkt). Co więcej, przyporządkowanie $f \to S_f$ jest bijekcją między zbiorem $(0,\infty)^{[0,2\pi)}$ i rodziną wszystkich selektorów. Zatem moc rodziny wszystkich selektorów jest równa

$$\left|(0,\infty)^{[0,2\pi)}\right| = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\mathfrak{c}} = 2^{\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}} \ .$$