DRZEWA:

1. las $\equiv$ graf acykliczny
2. drzewo $\equiv$ spójny las

Def. liść $\equiv$ wierzchołek o rzędzie 1.

Lemat 1. W każdym drzewie jest liść.

D-d. $(V, T) \leftarrow$ drzewo $(|V| < \infty)$

• Jeśli $|V| = n$, to każda droga ma dług $\leq n$.

Weźmy drogę o największej długości:

$x_1, x_2, \ldots, x_k$

? dlaczego nie mogę jej przedłużyć ?

? $\deg(x_k) > 1$? ← acykliczność.

więc x_k jest liściem.

Wniosek: jeśli $|V| \geq 2$; spójny G

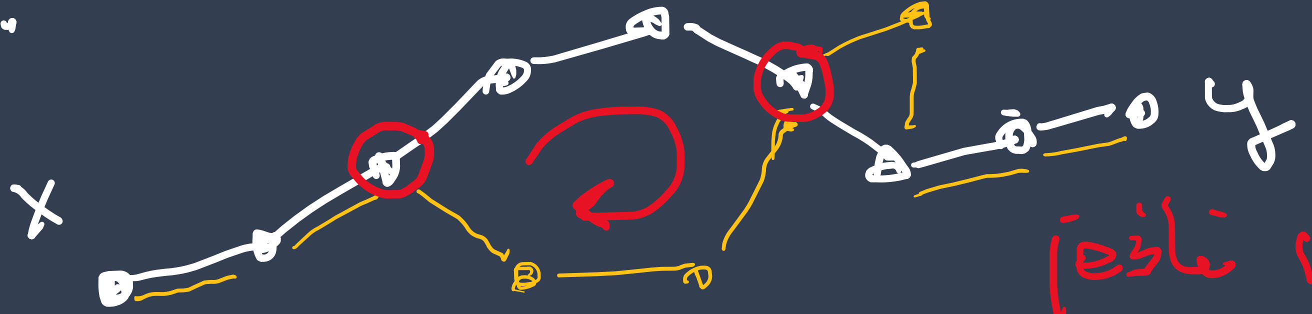
$\Downarrow$

$\exists^{\geq 2}$ liście

ZADANIE: dokładnie + ! 2 liście ! $\Rightarrow$ $T \simeq L_n$

Lemat. Jeśli (V,T) jest drzewem, to dla dowolnych różnych $x, y \in V$ istnieje dokładnie jedna droga od x do y.

D-d.



jeśli nie, to mamy cykl.

Tw. Następujące warunki są równoważne:

1) (V,T) jest spójny i acykliczny
2) (V,T) jest spójny i $|T| = |V| - 1$
3) (V,T) - spójny i wyrzucenie dowolnej krawędzi rozspójnia graf
4) (V,T) - ~~spójny~~ acykliczny i dowolnej krawędzi produkuje cykl.

D-d (1) $\to$ (2) spójne acykl $\to$ spójn. i $|T| = |V| - 1$.

indukcja po $n = |V|$.

1) $n = 1$; $T = \phi$; $|T| = |V| - 1 = 1 - 1$ $\blacksquare$

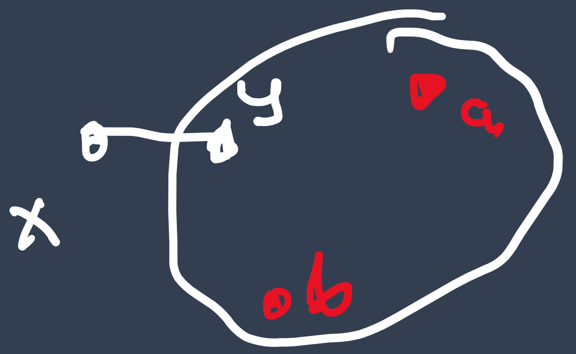
2) Zał. że dla n jest OK.

Weźmy drzewo (V, T) o $n+1$ wierzchołk.

Niech $x \in V$ będzie t. że $\deg(x) = 1$

Kładziemy

$$V' = V \setminus \{x\}, \quad E' = E - \{xy\}.$$

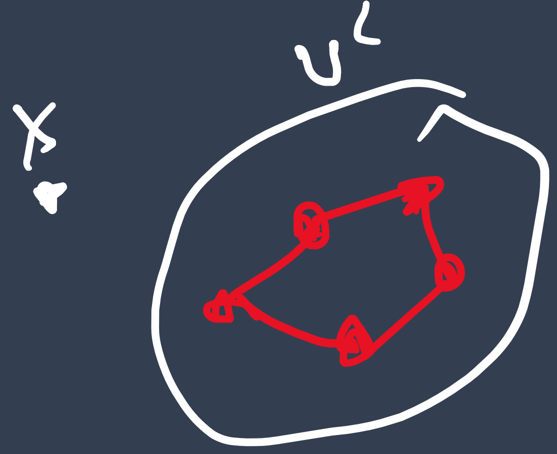


Bierzemy $a, b \in V'$, $a \neq b$

w (V, T) mamy drogę od a do b

na nie ma x; to jest droga w V'!

(V', E') jest spójny i acykliczny, czyli to jest drzewo o n wierzchołkach.



ZATEM: $|E'| = n - 1$

ZATEM

$$|E| = |E' \cup \{xy\}| = |E'| + 1 = (n-1) + 1 = n = (n+1) - 1$$

$\blacksquare$

D-d (2) $\rightarrow$ (1). Zał. (V,E) - spójny $\wedge$ $|E| = |V| - 1$

$\rightarrow (V,E)$ ~~ału~~ spójny + acykliczny.

subLemat. Jeśli (V,E) jest grafem prostym i $|E| = |V| - 1$ to (V,E) ma liść.

D-d. Zał. że $|E| = |V| - 1$ i nie ma liści, czyli $(\forall x \in V)(\deg(x) \geq 2)$.

$$\underbrace{\sum_{x \in V} \deg(x)}_{= 2 \cdot |E|} \geq \sum_{x \in V} 2 = |V| \cdot 2$$

zatem: $|E| \geq |V|$.

Ind. po $n = |V|$.

- $n = 1$: ok
- zał. ind. dla n – ok.

(V, E) : $|E| = |V| - 1$ + spójn. , $|V| = n+1$

Wybieramy liść x

$V \setminus \{x\}$

x

Robimy (V', E').

$|E'| = |V'| - 1$

- to jest spójne ~~acykl~~.
- $|V'| = n$

Ind.

- acykliczn (V', E')

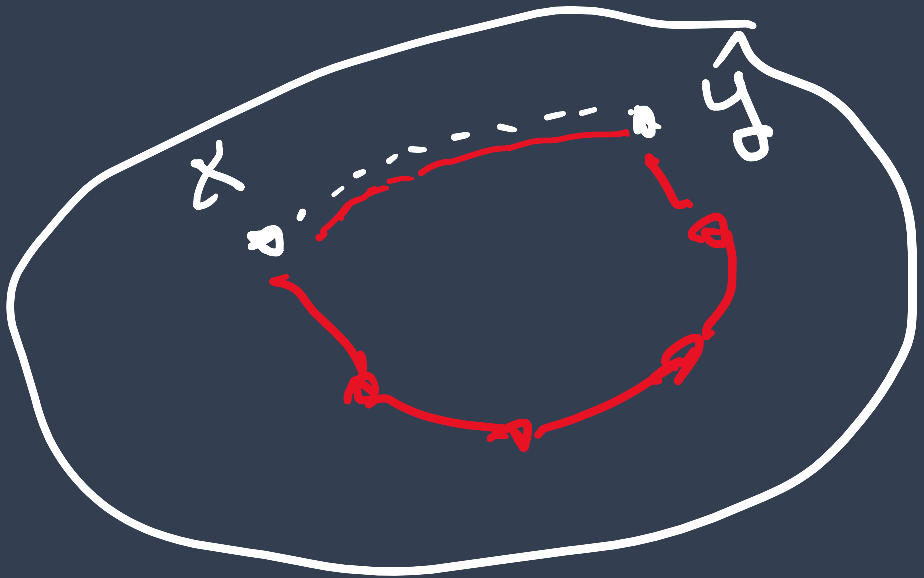
$\Rightarrow$ acykliczn.

D-d (1) → (3)

(3) = spójny + usunięcie krawędzi rozspójnia graf.

(a.a.). Załóżmy, że ~~xy jest~~

xy ∈ E jest którego usunięcie nie rozspójnia grafu



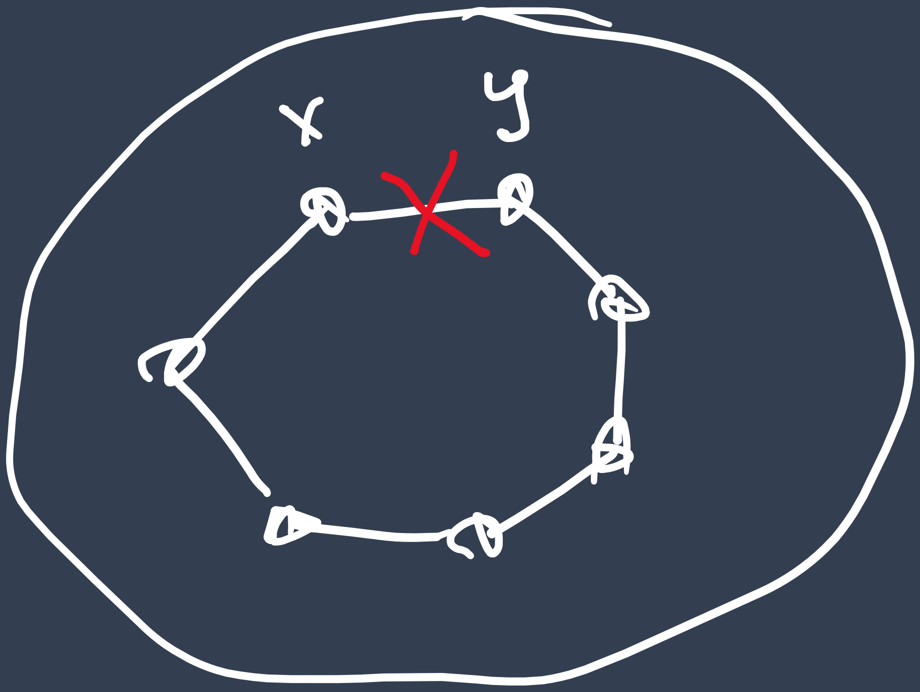
mamy cykl.

D-d (3) → (4)

spójność:

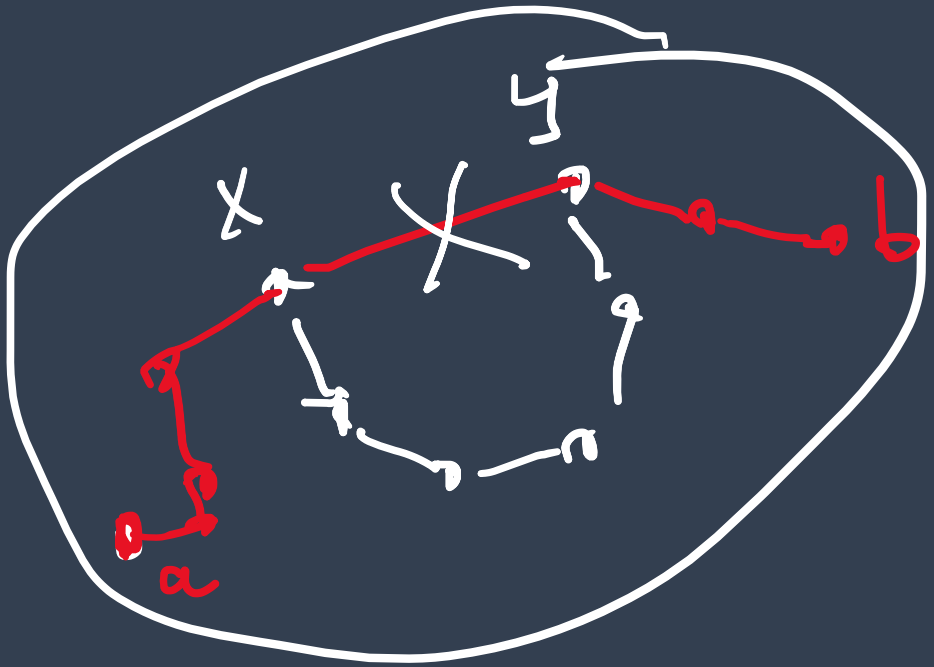
usunięcie krawędzi rozspójnie ⟹ acykliczność.

(a, a)



~~xy~~ xy z cyklu usuwamy ją.

CLAIM: to nadal jest spójne



D-d (1) ⟶ (4)

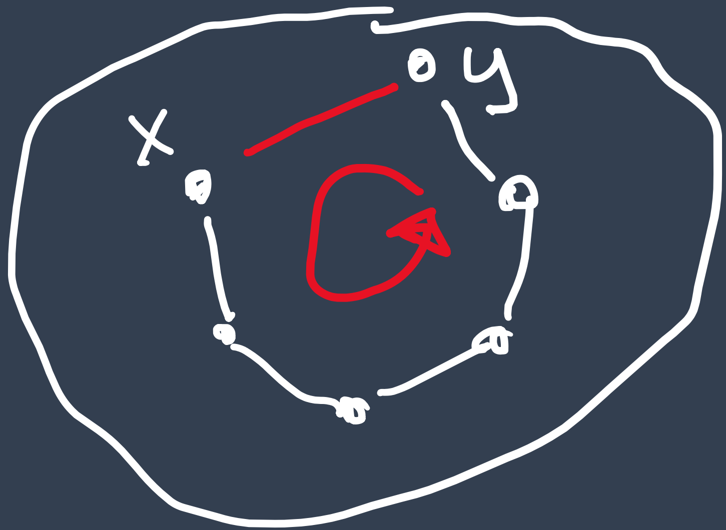
acykliczność

dod. dowolnej

krawędzi

buduje cykl.

$x, y \in V$; $x \neq y$; $xy \notin E$



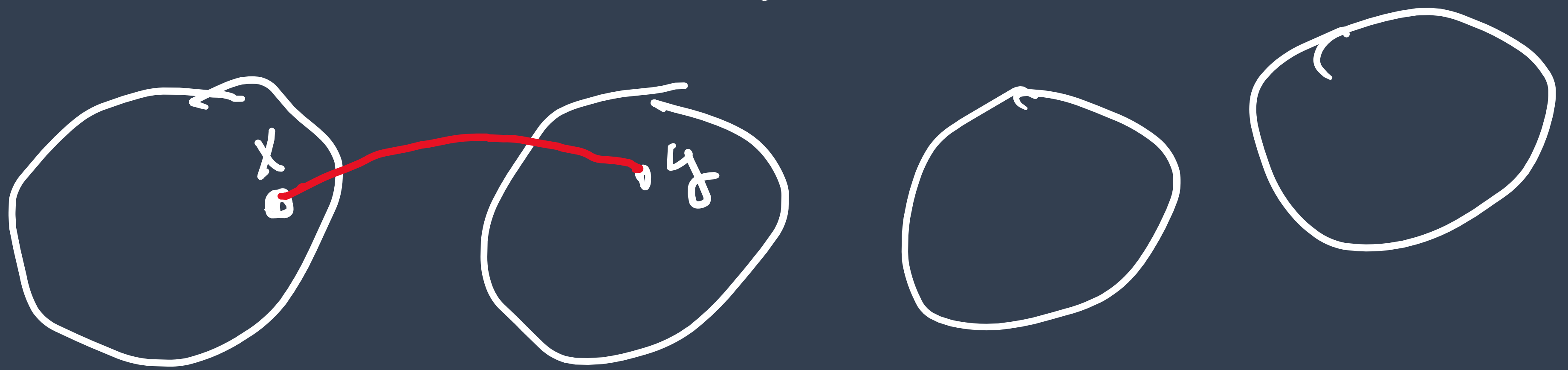
mamy cykl

w $(V, E \cup \{xy\})$

D-d. (4) $\longrightarrow$ (1)

acykl. + dod. kraw. psuje acykl. $\qquad$ acykl. + spójność

Zał. że (V,E) nie jest spójny. $\leftarrow$ kawał grafu



$x,y \in V$ z różn. komponent. Dodajemy xy. nie mamy nowego cyklu.

WNIOSEK. (V,T) - drzewo $\equiv$ spójny + usunięcie dowolnej krawędzi rozspójnia graf.

Weźmy dowolny graf (V,E) spójny.

$\mathcal{H} = \{E' \subseteq E : (V,E') \text{ - spójny}\}$

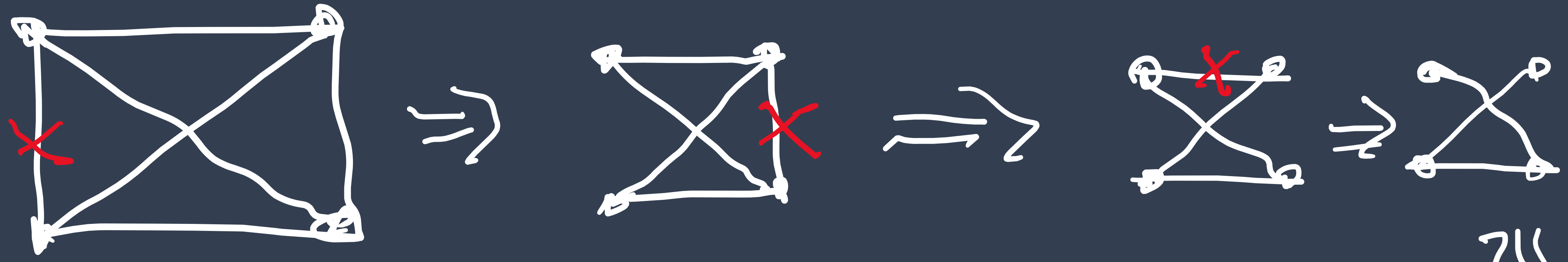
$k = \min\{|E'| : E' \in \mathcal{H}\}$ $\quad E' \in \mathcal{H},\ |E'| = k.$

(V,E') - spójny

usunięcie krawędzi rozsp. graf (V,E')

Wn. Dla dowolnego grafu spójnego (V,E) istnieje $T \subseteq E$ t. że (V,T) jest drzewem.

[drzewo rozpinające grafu (V,E)].



Zasada: usuwaj krawędzie tak długo, aż nie zaburzysz spójności.

wn. (V, E) - spójny $\Rightarrow |E| \geq |V| - 1$.

Przykład. Zadanie: input: $x_1, \dots, x_n$
output: $\min\{x_1 \dots x_n\}$

używaj tylko porównań

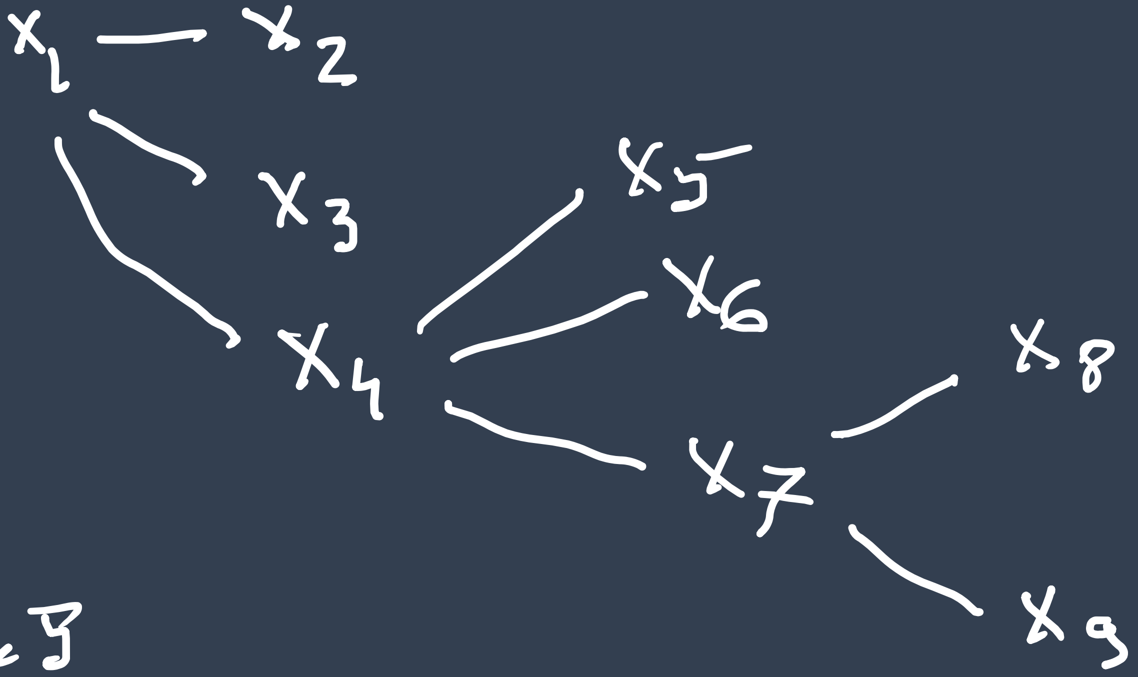
```
m = x_1;
for(i=2 to n) do{
  if(x_i < m){m = x_i;}
}
```

$n-1$ porównań.

CZY MUSIMY wykonać $n-1$ porównań?

$$\vec{X} = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ [3, & 5, & 7, & 2, & 4, & 8, & 1, & 2, & 3] \end{array}$$

$m = 3$



Zał. że $(x_1, \dots, x_n)$ $\quad m = \min\{x_i\}$

wykonaliśmy $< n-1$ porówn. $\quad m = x_a$

i otrzymałeś dobry wynik

$(\{1, \dots, n\}, E) \leftarrow$ nie jest spójny

$\bar{y} = (x_{i_1} \dots x_{i_k}, \; x_{j_1}+C, x_{j_2}+C, \dots, x_{j_l}+C)$

C - duża liczba.

$\blacksquare$

WNIOSEK. Zał. że (V,E) ma k składowych

wtedy $|E| \geq |V| - k$.

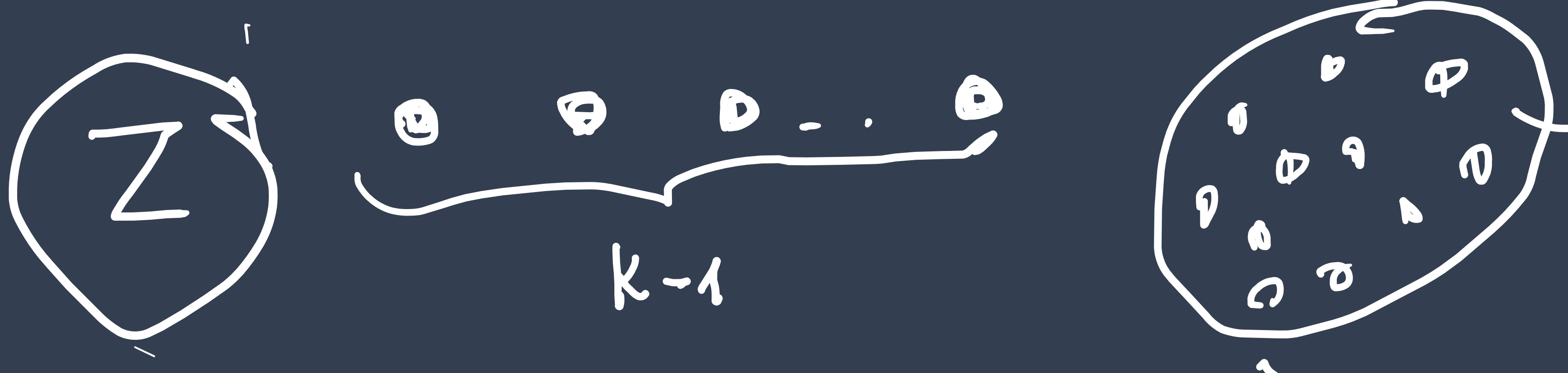
$$E = E_1 \,\dot{\cup}\, \ldots \,\dot{\cup}\, E_K$$

$$|E_i| \geq n_i - 1$$

$$|E| \geq \sum_{i=1}^{K} (n_i - 1) = n - k.$$

Q. Zał. że (V,E) jest grafem o k składowych i $n=|V|$.
Jaka jest maksymalna moc zbioru $|E|$?

$$n-(k-1) = n-k+1$$



K_{n-k-1}

$$|E| \leq \binom{n-k+1}{2}$$

Uwaga:
$k=1$

G :

$1 < a < b$

$K_a \setminus \{x\}$ $K_b \cup \{x\}$ + wszyst. możli

2L

G' : K_{a-1} K_{b+1}

Liczba krawędzi się zwiększyła.

WNIOSEK: (V,E) - k składowych

$$\Downarrow$$

$$|V|-1 \leq |E| \leq \binom{|V|-k+1}{2}$$

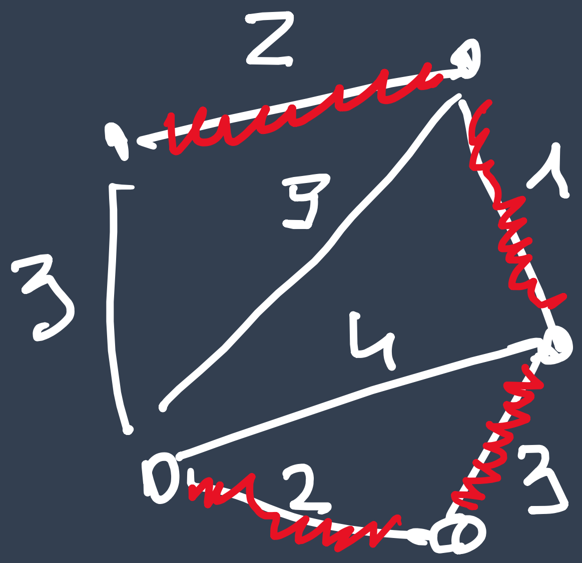
DRZEWA EKONOMICZNE (optymalne)

(V,E) - spójny graf ; $f: E \longrightarrow \mathbb{R}^+$
(koszt krawędzi)

$T \subseteq E$

(V,T) - drzewo

$$f(T) = \sum_{xy \in T} f(xy)$$



znajdź T - drzewo

t. że

$f(T) =$ najmniejsze.