(P) Pok., że, jeśli (V, E) jest grafem $\overset{\text{spójnym}}{\text{z}}$ $|V| \geq 2$, to istnieje $x \in V$ t. że $G - \{x\}$ jest spójny.

D-d. Niech $T \subseteq E$ będzie takie, że $G' = (V, T)$ jest drzewem. W G' jest liść. Oznaczmy go przez a.
Wtedy $G' \setminus \{a\}$ jest spójny.
Zatem $G \setminus \{a\}$ jest spójny.

Drzewach ekonomicznych (minimal spanning tree).

Mamy graf spójny $G = (V, E)$, mamy

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}^{>0} = (0, \infty)$$

Dla $F \subseteq E$

$$f(V, F) = \sum_{e \in F} f(e) \quad \leftarrow \text{koszt grafu } (V, F)$$

$$\alpha = \min\{ f(V,T) : T \subseteq E \wedge (V,T) \text{ jest drzewem} \}$$

MST : taki $T \subseteq E$, że (V,T) – drzewo i $f(V,T) = \alpha$.

ALGORYTM KRUSKALA

(V,E) – spójny.

① Budujemy las $L_0 = \{\{x\} : x \in V\}$

② mając las drzew $L_K = \{(V_1,E_1), \dots, (V_m,E_m)\}$

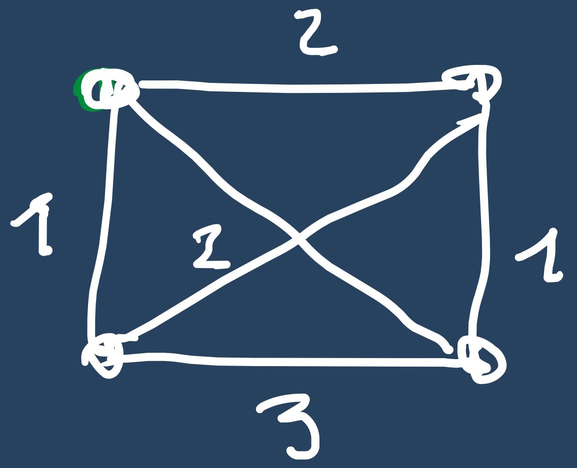
- $V_1, \dots, V_m$ ← partycje V
- (V_i,E_i) – drzewo, $E_i \subseteq E$.

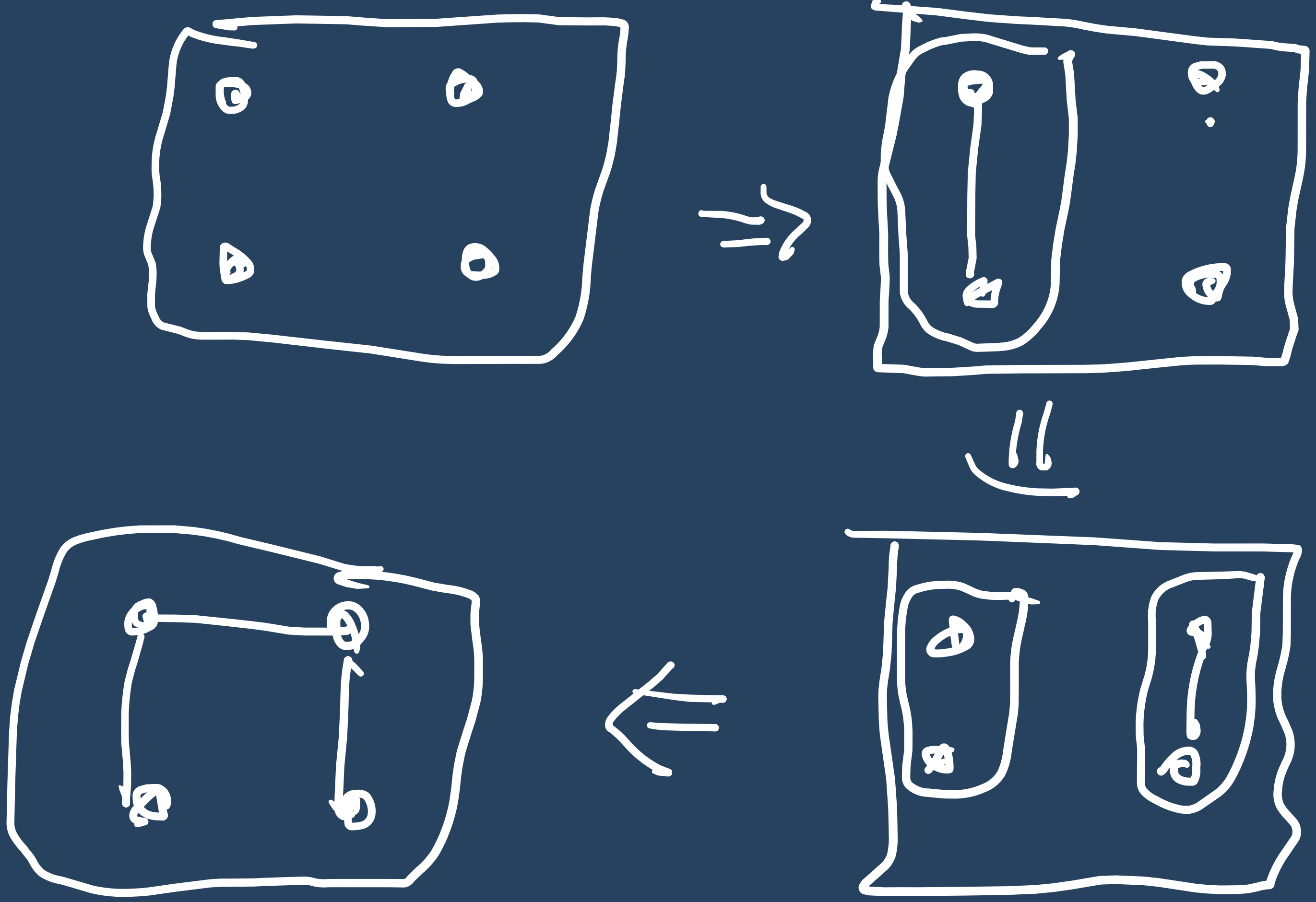
Szukamy krawędzi o minimalnej wadze łączącej dwa różne drzewa

~~zbiory~~ (V_i,E_i), (V_j,E_j), $e \in E$ $(i \neq j)$

- Łączymy (V_i, E_i) z (V_j, E_j) za pomocą e

$$\{(V_i, E_i), (V_j, E_j)\} \rightsquigarrow (V_i \cup V_j, E_i \cup E_j \cup \{e\})$$





ALG-KR. produkuje drzewo.

Pok. poprawność AK.

Indukcja: pok. że ~~w~~ ~~każdz~~ każdym kroku istnieje drzewo optymalne T t. że

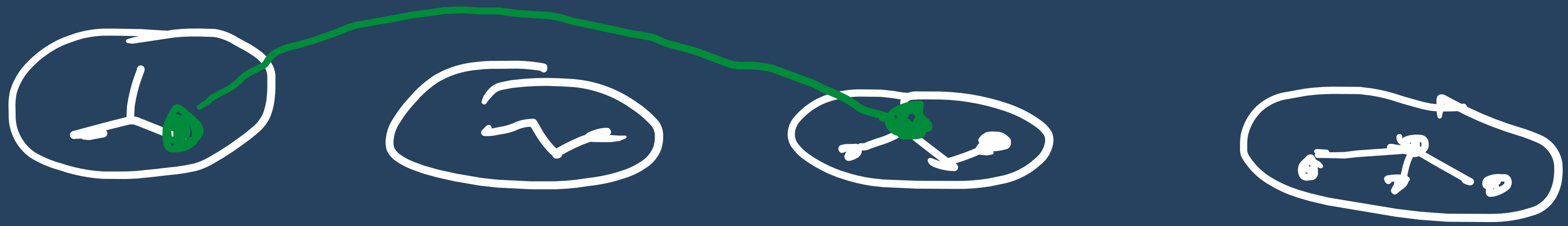
$$\bigcup_{i=1}^{m} E_i \subseteq T.$$

1. $L_0 = [(\{x_1\},\emptyset), \ldots, (\{x_n\}, \emptyset)]$
2. Zał. że w kroku ~~k~~ teza jest prawdziwa

L_k

$\Downarrow$

L_{k+1}

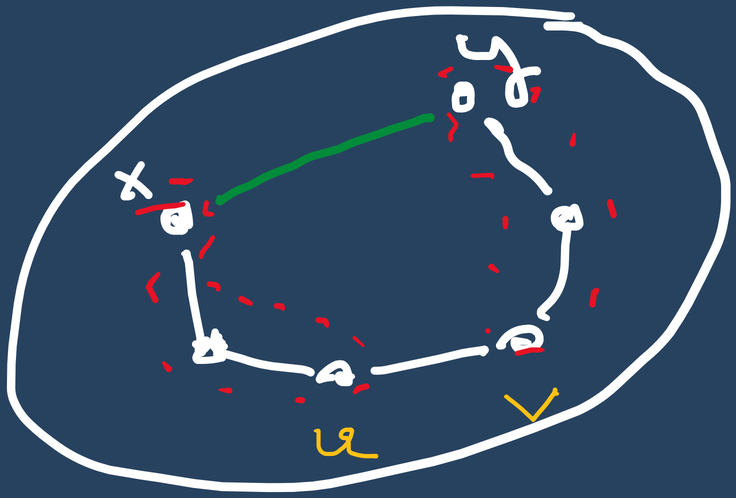


T

- znajdujemy x, y z różnych składowych t. że xy jest "minimalnym łącznikiem" między skład., czyli $f(xy)$ jest najmniejsza.

(P1) $xy \in T$: to nie mamy co robić.

(P2) $xy \notin T$



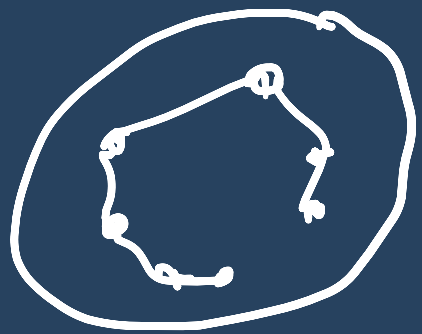
T : drzewo $\quad xy \notin T$

mamy drogę w T od x do y.

mamy u,v t.że $uv \in T$

i $uv \notin E_1 \cup \ldots \cup E_m \qquad f(xy) < f(uv)$

niech $T' = T \setminus \{uv\} \cup \{xy\}$.



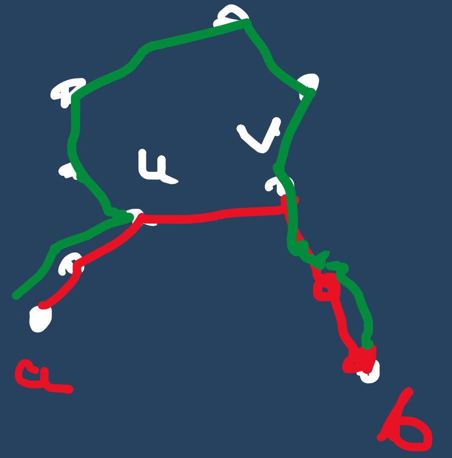
T'

1) T'-spójne ? ok

2) T'-drzewo ?

$|T'| = |T| - 1 + 1 = |T|$

$= |V| - 1$.



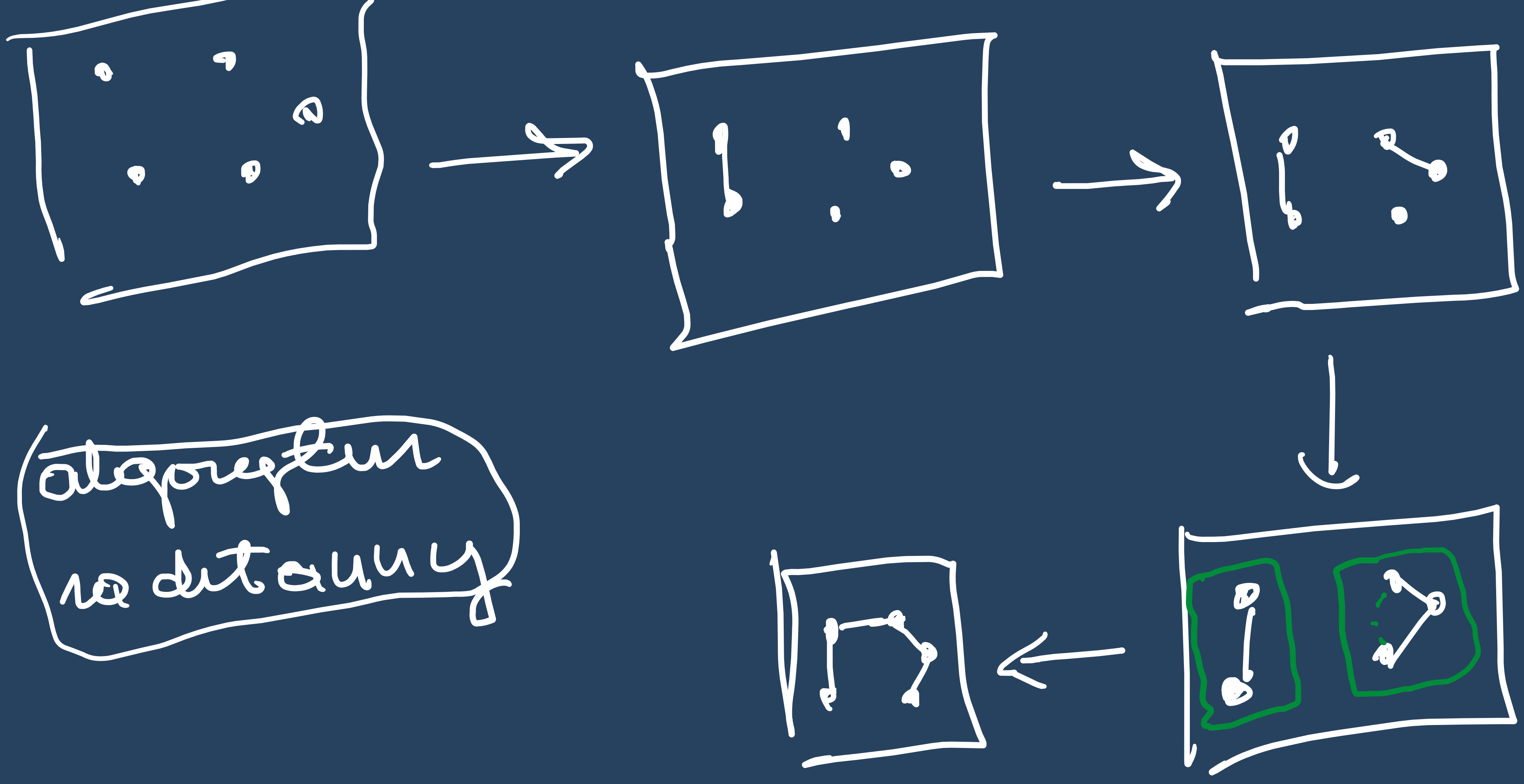
$$f(T') = f(T) - f(uv) + f(xy) \leqslant f(T) = \alpha$$

ale $f(xy) \leqslant f(uv)$

więc $f(T') = \alpha$.

UWAGA: $f(xy) = f(uv)$

<u>KONIEC DOWODU</u>.



algorytm na ditauny

LISTY ZBIORÓW ROZŁĄCZNYCH

ROZSĄDNA IMPLEM.:

$O(|E| \cdot \lg(|E|))$.

ALGORYTM PRIMA.

- $X_1 = \{x_1\}$: wybieramy dowolny wierzchołek.
- Budujemy $X_K = \{x_1, \dots, x_K\}$, $E_K \subseteq [X_K]^2$

drzewo na X_K

$Z = \{y \notin X_K : (\exists x \in X_K)\ xy \in E\}$.

$\beta = \min\{f(xy) : y \in Z \wedge x \in X_K \wedge xy \in E\}$

ustalamy

$x, y : x \in X_K,\ y \in Z,\ xy \in E \wedge f(xy) = \beta$.

$X_{K+1} = X_K \cup \{y\}$, $E_{K+1} = E_K \cup \{xy\}$.

ZADANIE: Poprawność algorytmu PRIMA.

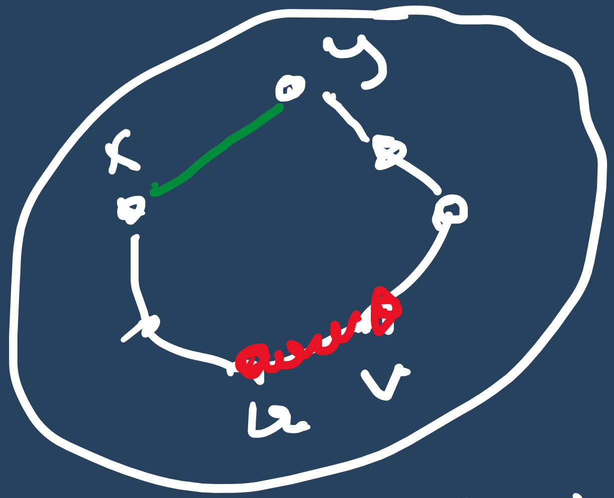
HINT: popatrz na pierwszy moment, gdy dodajemy krawędź spoza drzewa optymalnego.

CZAS WYKONANIA: $O(|V| \cdot |E|)$.

Tw. Zał. że $f: E \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}^+$. Wtedy istnieje tylko jedno drzewo optymalne.

D-d. Zał. że T_1, T_2 – optymalne, $T_1 \neq T_2$

$\alpha = f(T_1) = f(T_2)$. Jest $xy \in T_1 \setminus T_2$.



ale $xy \notin T_2$; jest więc droga od x do y w T_2.

mamy uv na tej drodze spoza T_1

$uv \in T_2$, ale $uv \notin T_1$ ($uv \in T_2 \setminus T_1$)

Zał. że $f(xy) < f(uv)$ sprzeczność

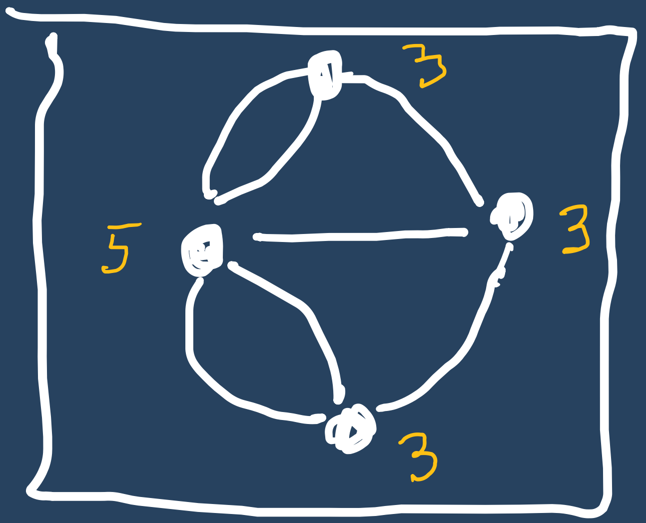
$T_2' = T_2 \setminus \{uv\} \cup \{xy\}$: $f(T_2') = f(T_2) - f(uv) + f(xy) < f(T_2) = \alpha$

Grafy Eulerowskie

HISTORA:

Królewiec

∃ spacer że przez każdy most przejdę dokładnie raz (i wrócę w to samo miejsce)



ODP. NIE

deg:

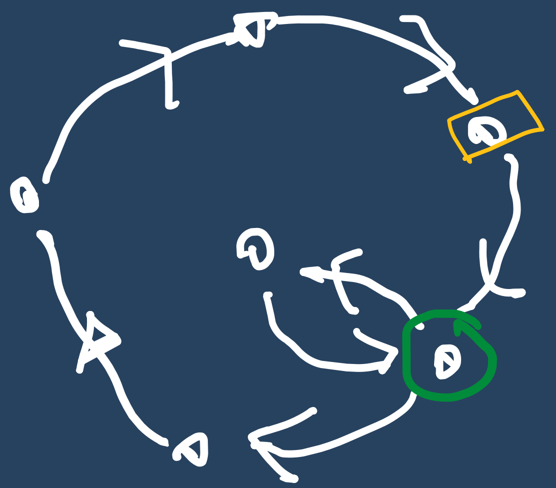
Mamy graf ogólny (V, E, φ).

Cykl Eulera: taki ciąg

$$x_1 e_1 x_2 e_2 \ldots \ldots x_{n-1} e_{n-1} x_n \; (= x_1)$$

t. że 1) $e_i \neq e_j$ dla $i \neq j$

2) $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\} = \{\varphi(e) : e \in E\}$



FAKT Jeśli $x_1 e_1 \ldots x_{n-1} e_{n-1} x_n$ ($x_n = x$)
jest cyklem Eulera
to $(\forall i \in \{1..n\})(2 \mid \deg(x))$

TW. Zał. że (V, E, φ) jest takie, że
$(\forall x \in V)(2 \mid \deg(x))$.
wtedy istnieje partycja $E = E_1 \cup \ldots \cup E_n$
t. że E_i są cykli

tw. strukturalne

K_5