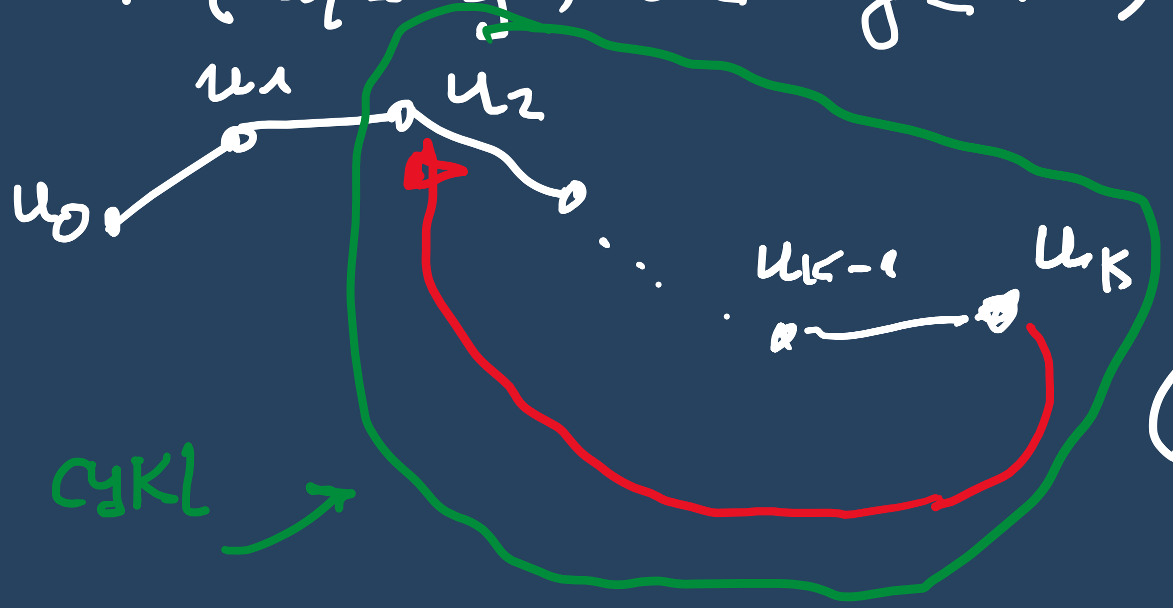
CEL: $\begin{cases} (V, E, \gamma) \quad \gamma : E \to [V]^{\leq 2} \setminus \emptyset \ ; \ |V| < \infty \\ (\forall x \in V) \ 2 \mid \deg(x). \end{cases}$

$\Rightarrow E = E_1 \cup \ldots \cup E_n \ , \quad E_i \leftarrow$ cykl.

D-d. ustalmy $u \in V$.

Budujemy drogę $u_0 = u, u_1, u_2, \ldots, u_k$ maksymalnej długości. $(u_i \neq u_j, \ 0 \leq i < j \leq k)$.

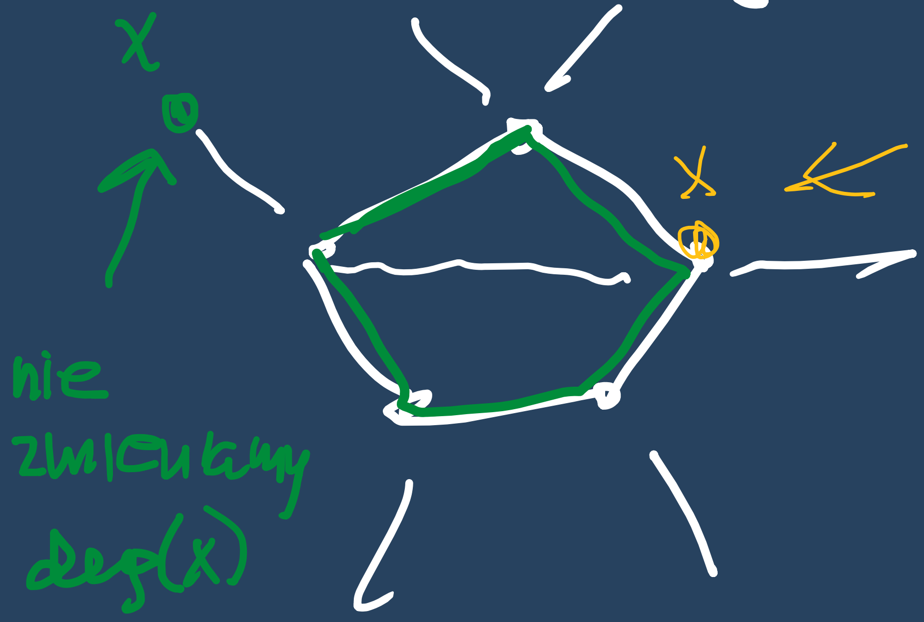


Jest $i \in \{0, \ldots, k-2\}$

$\{u_k, u_i\} \in E$.

$(\exists e \in E)(\gamma(e) = \{u_i, u_k\})$

Zastępujemy E przez $E \setminus$ krawędzie z cyklu. $\bar{E}'$

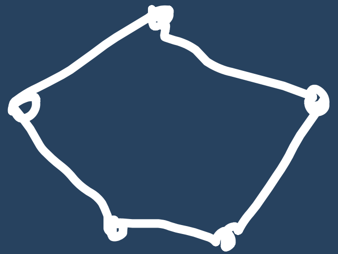


$\deg_{E'}(x) = \deg_{\bar{E}}(x) - 2$

czyli

$(\forall x \in V)\,(2 \mid \deg_{E'}(x))$.

K_5 : $\deg(x) = 4$



E_1

E_2

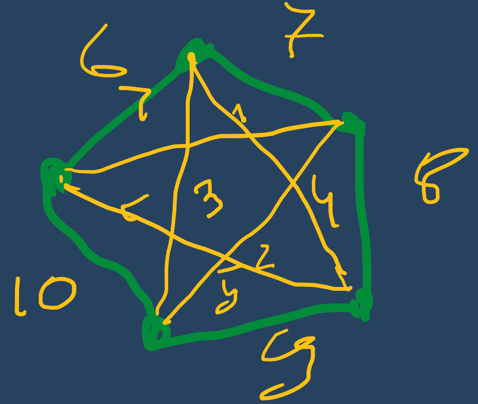
$$[5]^2 = E_1 \,\dot{\cup}\, E_2 .$$

Tw. Graf (V, E, γ) jest Eulerowski wtedy i tylko wtedy gdy

1) jest spójny

i

2) $(\forall x \in V)(2 \mid \deg(x))$.

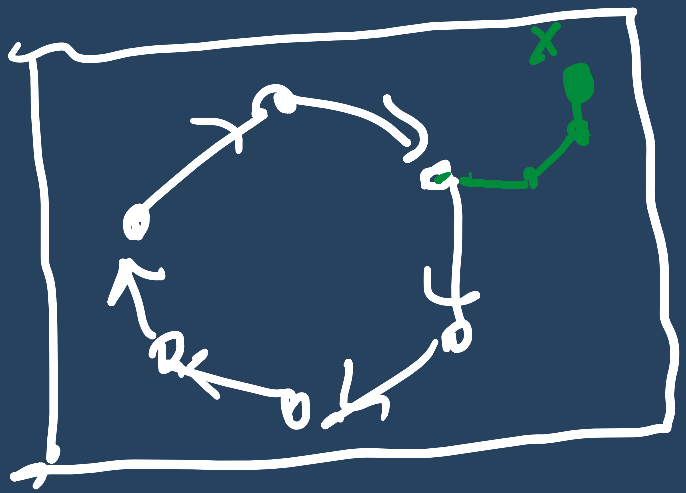


Def. G jest parzysty $\equiv (\forall x \in V)(2 | \deg(x))$.

D-d. Zał. że G jest spójny i parzysty,

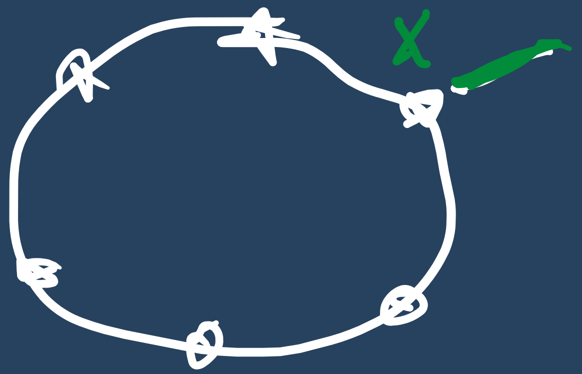
Przedstawiamy

$$E = E_1 \dot\cup E_2 \dot\cup \ldots \dot\cup E_n, \quad E_i\text{-cykle}$$



V_1 = zbiór wierz. na cyklu E_1.

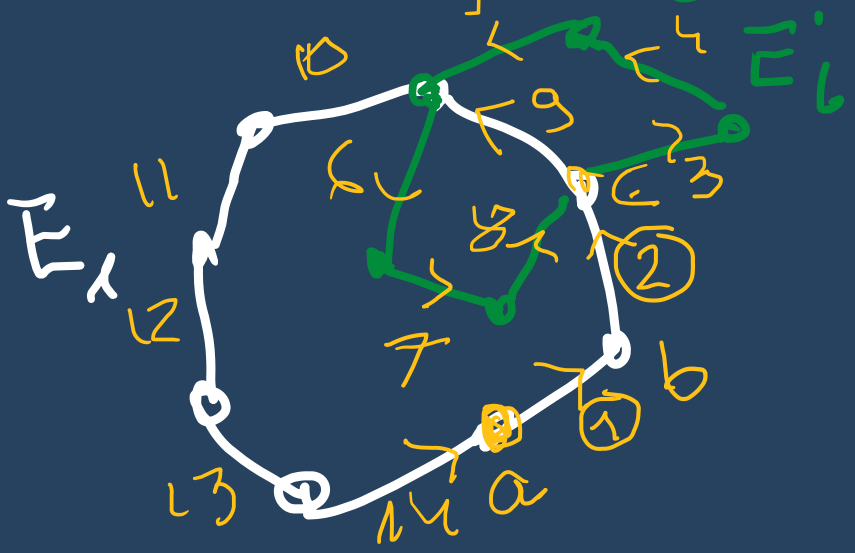
(P) $V \setminus V_1 \neq \emptyset$



mamy y, x.

- x jest na cyklu
- $e = \{x, y\}$ nie jest na cyklu

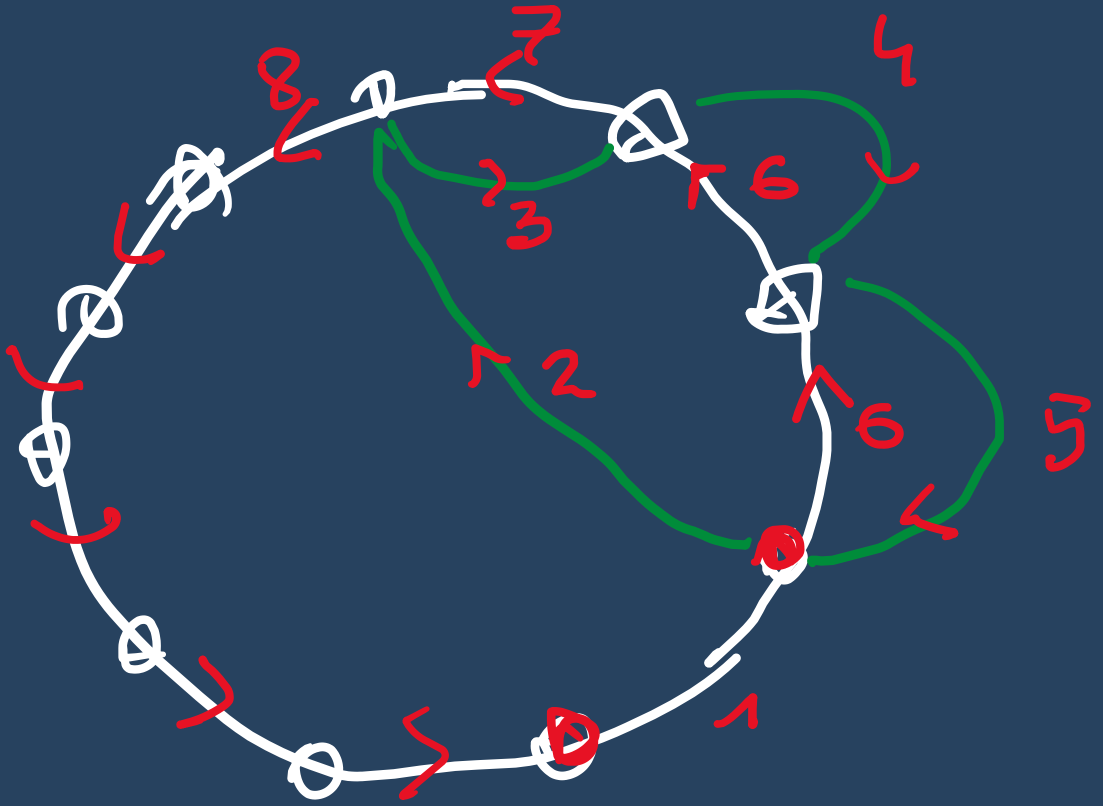
$e \in E_i,\ i \neq 1$

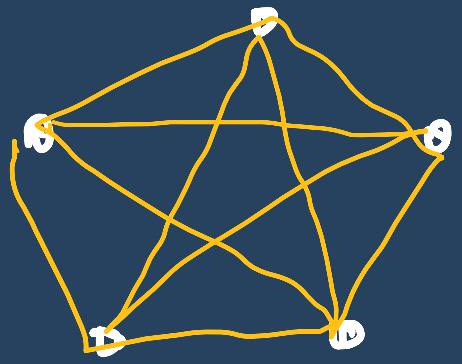


: łączymy te cykle

ten etap ciągniemy tak długo aż wyczerpiemy V.

II Etap. wt. ^ze zostały cykle



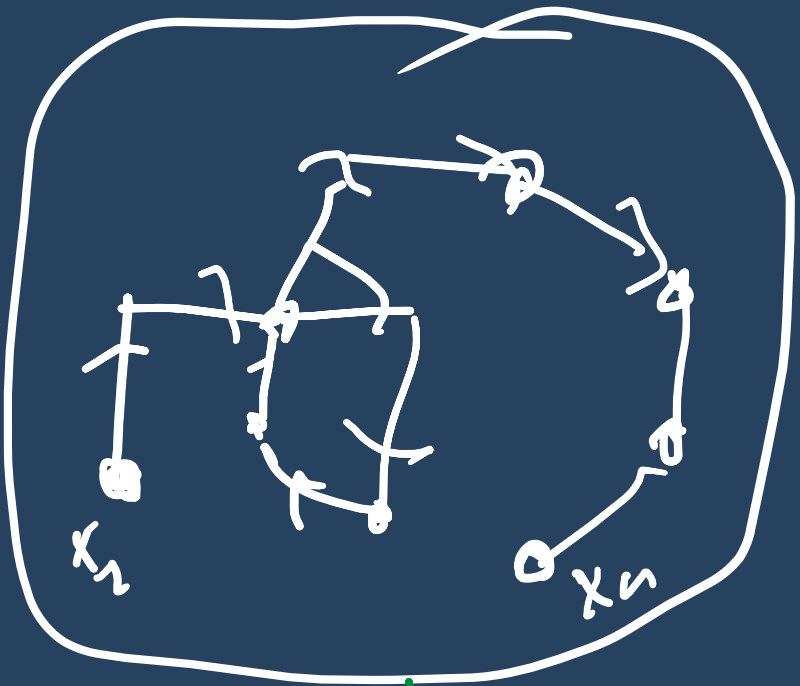


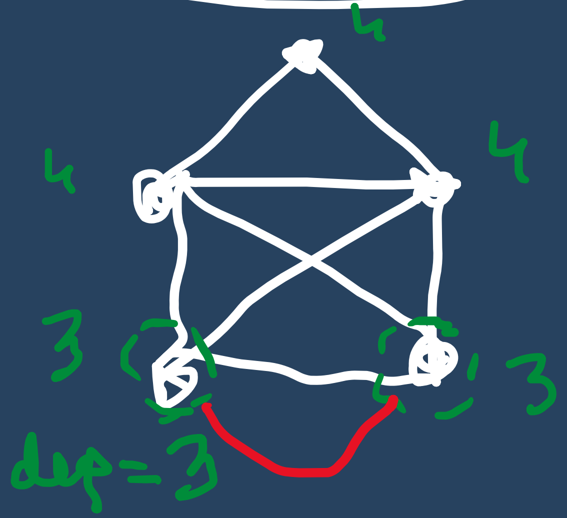
Def. Graf (V, E, γ) jest pół-Eulerowski jeśli istnieje ciąg

$$x_1 e_1 x_2 e_2, \dots, e_{n-1} x_n$$

t. że $e_i \neq e_j$ $(i \neq j)$ i $\{e_1, e_2 \dots e_n\} = E$.

$\{x_1, \dots, x_n\} = V$.





$x_1 e_1 x_2 e_2 \dots x_{n-1} e_{n-1} x_n$

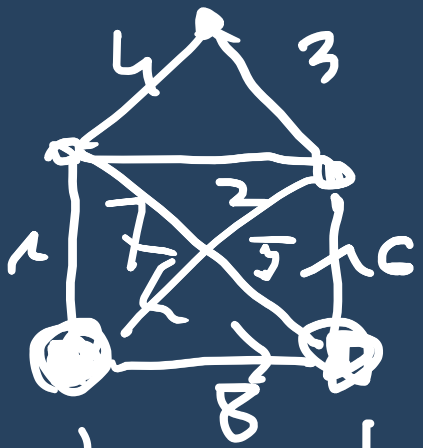
$2 \mid \deg(x)$

stopień nieparzysty

POMYSŁ: dodaj nowe krawędź $\{x_1, x_n\}$

mamy graf parzysty

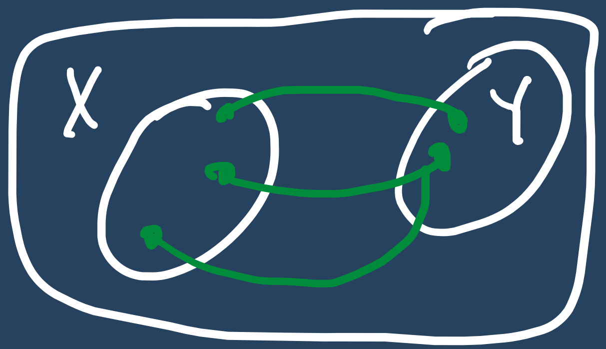
wn. G jest pół-Eulerowski
⇕
G jest spójny i $\left|\{x \in V : \neg(2 \mid \deg(x))\}\right| = 2$



start koniec.

DEF. $\mathcal{G}$ - graf ogólny; $X, Y \subseteq V$

$$E(X,Y) = \{ e \in E : \gamma(e) \cap X \neq \emptyset \text{ i } \gamma(e) \cap Y \neq \emptyset \}$$



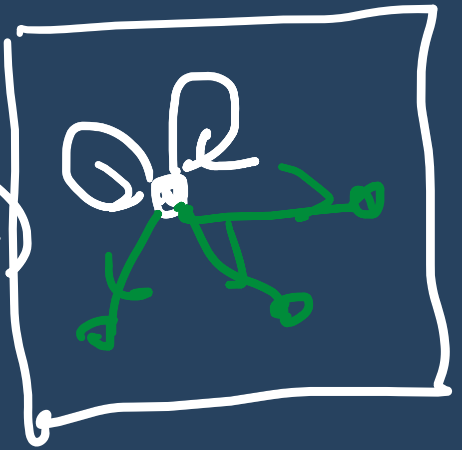
$$\partial(X) = E(X, X^c)$$

brzeg X (co-brzeg)

Tw. $\mathcal{G}$ jest parzysty $\equiv (\forall X \subseteq V)(2 \mid |\partial(X)|)$

D-d: ($\Leftarrow$) weźmy $x \in V$;

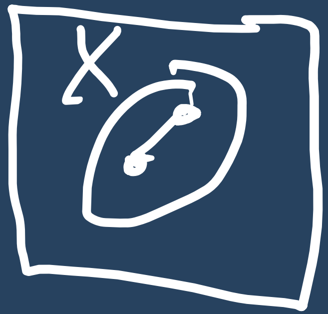
$$|\partial(\{x\})| = \deg(x) - 2 \cdot e(x)$$



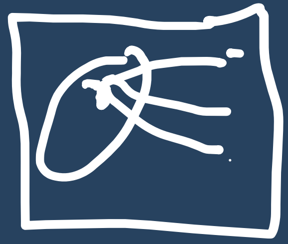
$e(x)$ = ilość pętli

(⇒) zał. że γ nie ma pętli

Bierzemy $X \subseteq V$.



parzyste → $\sum_{x\in X} \deg(x) = \sum_{x\in X}\sum_{e\in E} [\![x\in\gamma(e)]\!] =$



$$= \sum_{x\in X}\Big(\sum_{e:\gamma(e)\subseteq X}[\![x\in\gamma(e)]\!] + \sum_{e:\neg(\gamma(e)\subseteq X)}[\![x\in\gamma(e)]\!]\Big)$$

$$= \sum_{x\in X}\sum_{e:\gamma(e)\subseteq X}[\![x\in\gamma(e)]\!] + \sum_{x\in X}\sum_{e:\neg\gamma(e)\subseteq X}[\![x=\gamma(e)]\!] =$$

$$= \sum_{e:\gamma(e)\subseteq X}\underbrace{\sum_{x\in X}[\![x\in\gamma(e)]\!]}_{2} + |\partial(X)| = \text{even} + |\partial(X)|$$

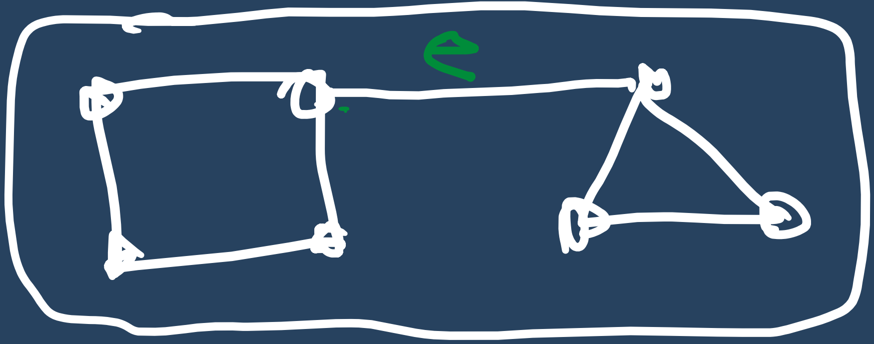
∎

Oznaczenie: $c(\mathcal{G})$ = liczba komp. spójnych grafu $\mathcal{G}$.

Def. Krawędź $e \in E$ nazywamy **mostem** jeśli $c((V, E \setminus \{e\}, \gamma)) > c(V, E, \gamma)$.

czyli: most = krawędź której usunięcie pogarsza spójność.

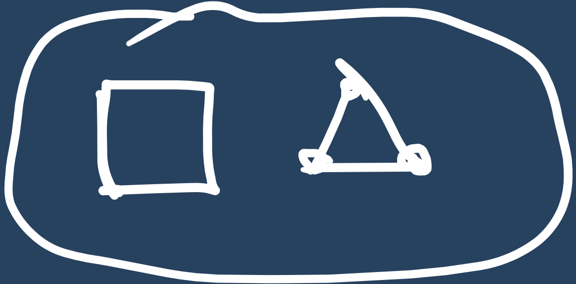
P



$c(G) = 1$

$c(G \setminus e) = 2$

usunięcie e.



każda krawędź jest mostem.

most $\equiv$ cut-edge

$\equiv$ krawędź rozsp.

$\equiv$ krawędź cięcia

Fakt: e jest mostem

$\Updownarrow$

$$c(G \setminus e) = c(G) + 1$$

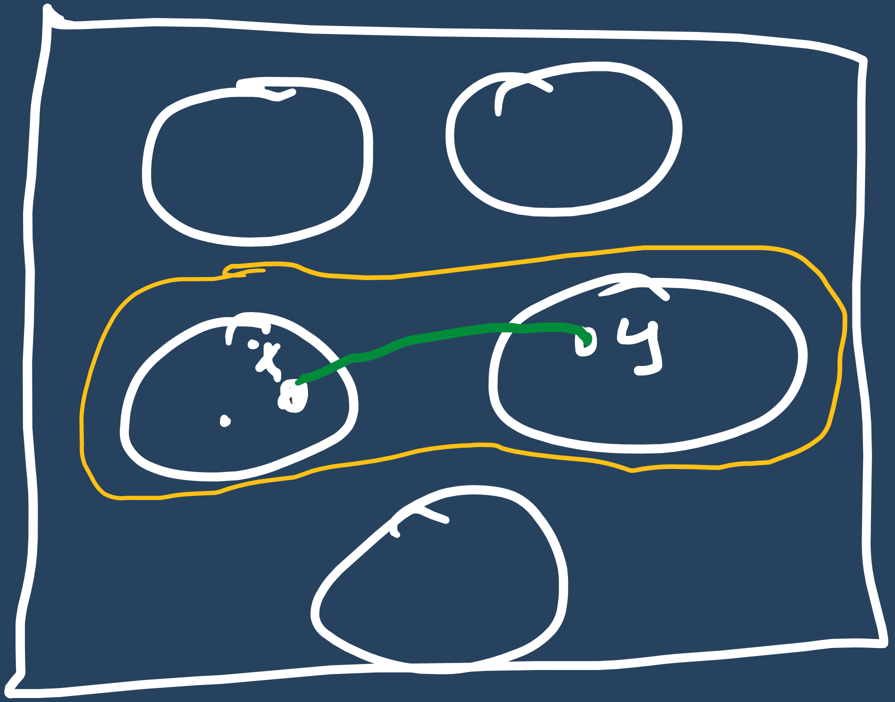
D-d:

$G \setminus e$:

$C_1 \cup \ldots \cup C_n$

$\uparrow$

komp. sp.



$\gamma(e) = \{x, y\}$

- nie ma takiego i, że $\{x,y\} \subseteq C_i$

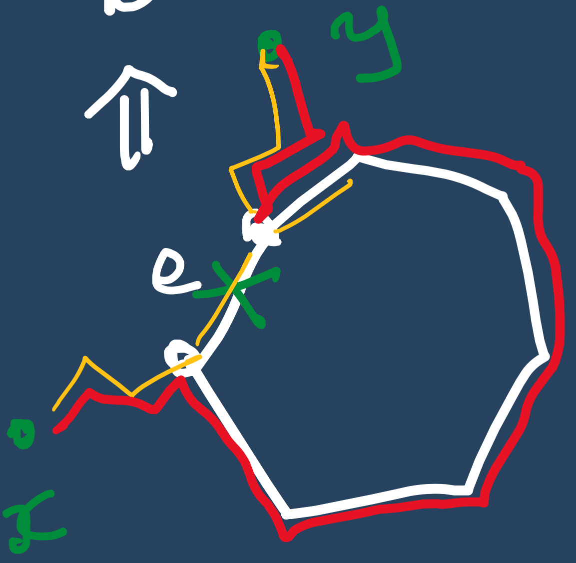
FAKT. e nie jest mostem

$\Updownarrow$

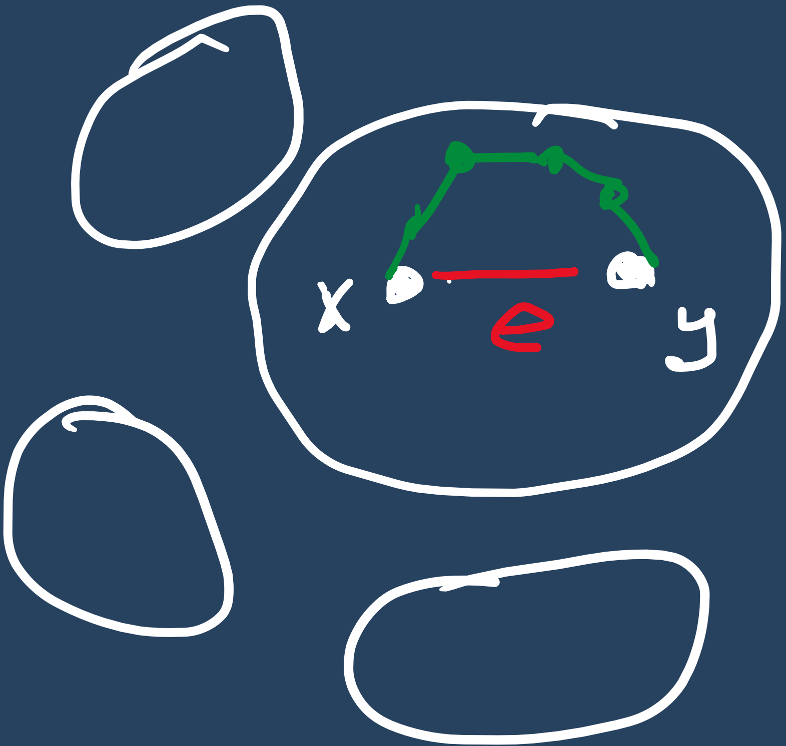
e występuje na cyklu

D-d

$\Uparrow$



$\Downarrow$



e - nie jest mostem

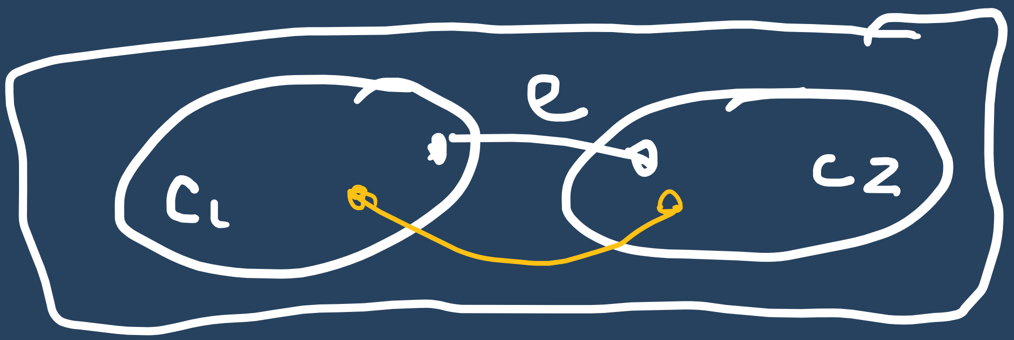
x, y są w tej samej komp spójnej C

usunięcie e nie psuje spójn. C.

mamy cykl. $\longleftarrow$

WNIOSEK. Jeśli graf jest parzysty, to nie ma mostów.

D-d. Not. że e jest mostem



- $2 \cdot |\partial(C_1)|$
- $|\partial(C_1)| > 0$
- $|\partial(C_1)| \geq 2$

- jest inna krawędź z C_1 do C_2. sprzeczność ☒

ALGORYTM FLEURY'ego. (koniec XIX w.)

$G = (V, E, \gamma)$; spójny + parzysty

ustalamy $u \in V$.

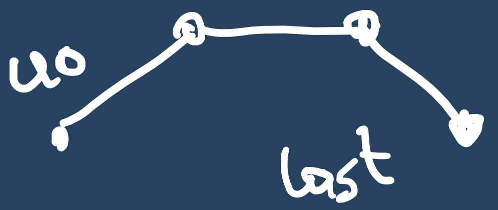
$$\begin{cases} C = (u) \\ last = u \\ F = E \end{cases}$$

while $(\partial_F(last) \neq \emptyset)$ {

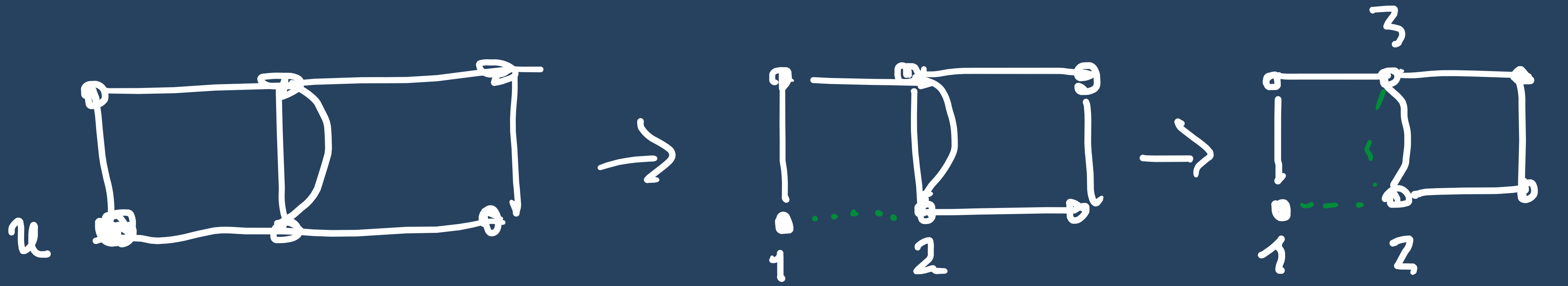
- ~~ust~~ wybieramy $e \in F$ t.ie $\gamma(e) = \{last, y\}$ e nie jest mostem (F) o ile to możliwe;
- $C \leftarrow C \| e \| y$
- $last \leftarrow y$
- $F \leftarrow F \setminus \{e\}$

}

return C;



(P)



mamy cykl

Eulera.