Grafy hamiltonowskie (spójne)

$\mathcal{G}=(V,E)$ Q? $\exists (x_1,\dots,x_n) \leftarrow$ droga

1) $x_i x_{i+1} \in E$, $x_n x_1 \in E$

2) $\{x_1,\dots,x_n\} = V$.

?

ALGORYTMICZNE: to jest zagadn. rozstrz.

Sprawdź $V!$ $(= Sym(V))$

Złożoność oblicz: $O(|V|!)$.

Podst. problem: Czy istnieje alg. odpow. na Q działający w czasie wielom. względem $|E|$ $\equiv$ $P=NP$

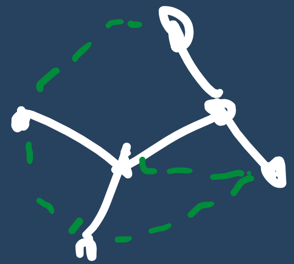
Tw (ORE). Zał. że (V,E) jest spójny i $|V| \geq 2$

$$(\forall x,y \in V)\big((\neg\, xy \in E) \longrightarrow deg(x) + deg(y) \geq |V|\big).$$

wtedy (V,E) jest hamiltonowski.

UWAGA. $n \geq 2 \longrightarrow K_n$ jest hamiltonowski.

D-d. Zał. że (V,E) spełnia zał. tw, ale nie jest hamiltonowski.



Rozważmy ciąg $E_0, E_1, \dots, E_k$ t.że

$E_0 = E$; $E_{i+1} = E_i \cup \{e_i\}$, $e_i \in [V]^2 \setminus E_i$

tak długo aż otrzymamy graf hamilt.

Patrzymy na $E_k = E_{k-1} \cup \{e\}$ $\quad e \in [V]^2 \setminus E_{k-1}$.

$|V| = n$.

- (V, E_i) $\quad i = 0 \dots k$.

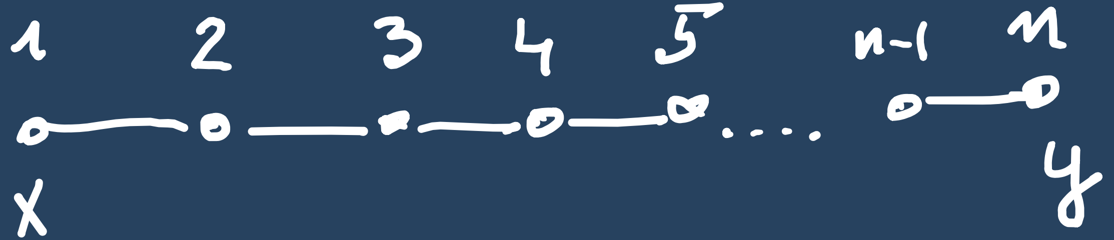
$$\deg_{E_i}(x) \geq \deg_E(x).$$

$$\deg_{E_i}(x) + \deg_{E_i}(y) \geq n \qquad xy \notin E_i.$$

(V, E_k)

e ← ta nowa krawędz

(V, E_{k-1})

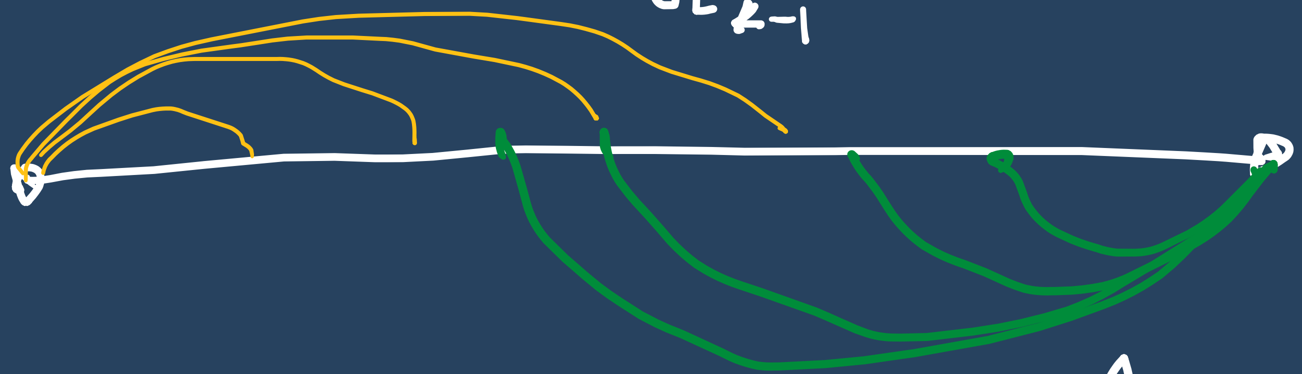


$\neg(xy \in E_{k-1})$ $\quad \deg_{E_{k-1}}(x) + \deg_{E_{k-1}}(y) \geq n$

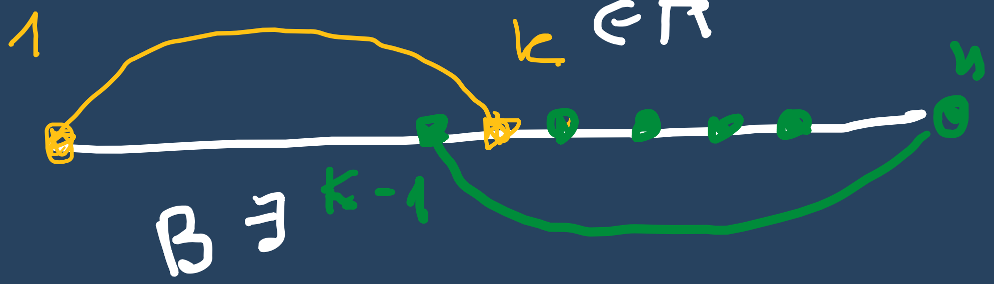
E_{k-1} $\quad N(1) \subseteq \{2, 3, .., n-1\}$ $\quad A = N(1)$

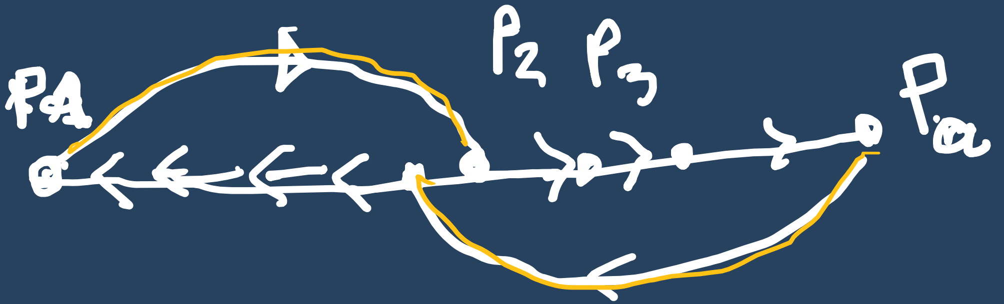
$N(n) \subseteq \{2, 3, .., n-1\}$ $\quad B = N(n)$

$$\begin{cases} \bullet\ A, B \subseteq \{2, \dots, n-1\} \\ \bullet\ |A| + |B| = \deg_{E_{k-1}}(1) + \deg_{E_{k-1}}(n) \geq n. \end{cases}$$



CEL :





to jest cyklem hamiltona.

Spójrzmy na A oraz $B+1$.

CEL: $A \cap (B+1) \neq \emptyset$

- $A \subseteq \{2, \dots, n-1\} \subseteq \{2, \dots, n\}$

$1+B \subseteq \{3, \dots, n\} \subseteq \{2, \dots n\}$.

$|A| + |B+1| \geq n$

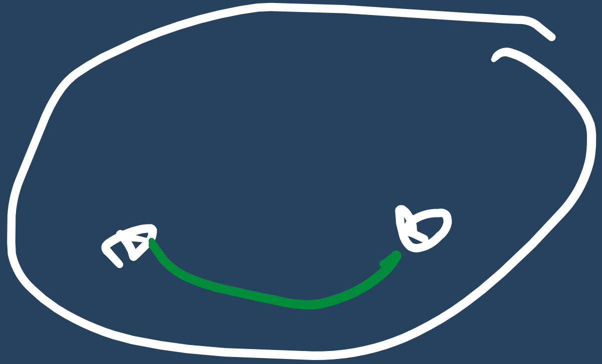
$$\begin{cases} |X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|. \\ |X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y|. \end{cases}$$

$|A \cup (B+1)| \leq (n-1)$

mamy

$$\begin{aligned} |A \cap (B+1)| &= |A| + |B+1| - |A \cup (B+1)| \\ &= |A| + |B| - |A \cup (B+1)| \geq |A| + |B| - (n-1) \\ &\geq n - (n-1) = 1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

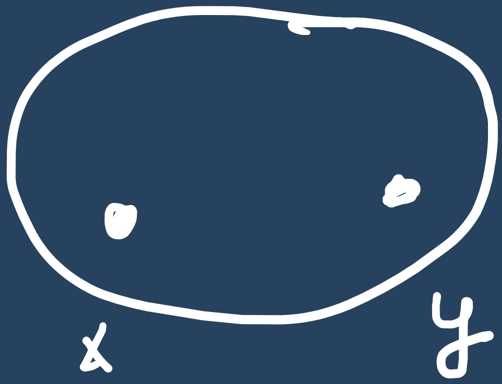
Grafy Eulerowskie $\Longleftrightarrow$ grafy pół-eulerowskie



$\uparrow \{x,y\}$

parzysty

$\Longleftarrow$



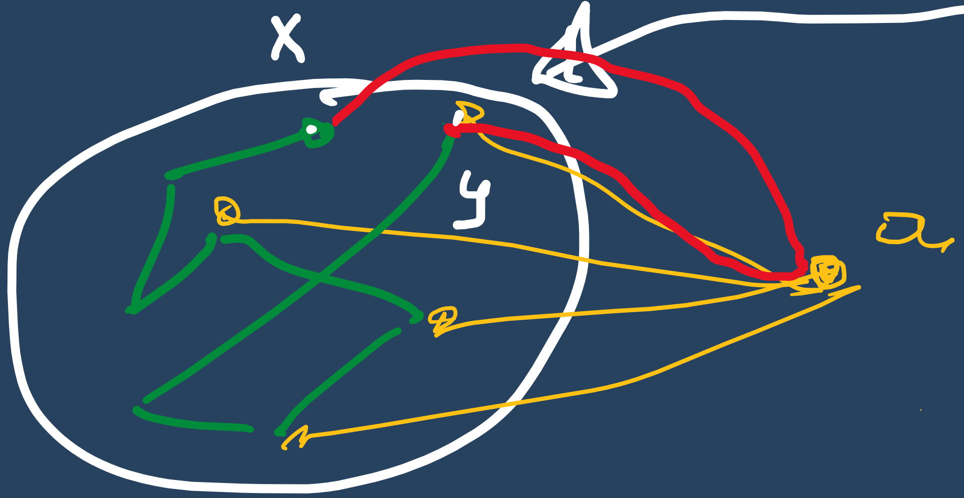
deg(x), deg(y) nieparzyste

+ reszta parzyste

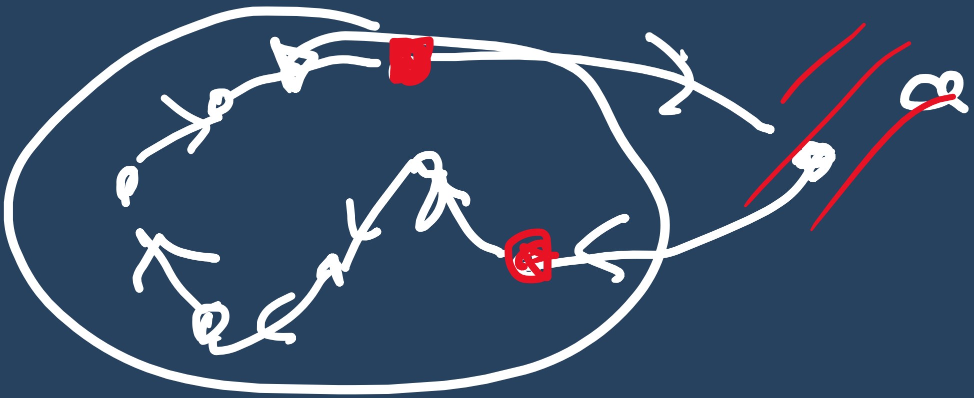
Podobne przejście: pół-hamiltonowski

(V, E)

$a \notin V$



$$(V \cup \{a\}, E \cup \{xa : x \in V\})$$



GRAFY PLANARNE

Def. • Krzywa (jordanowska): ciągłe $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}$.

• krzywa bez przecięć: krzywa 1–1

Def. Graf (V,E) jest planarny

$\Updownarrow$

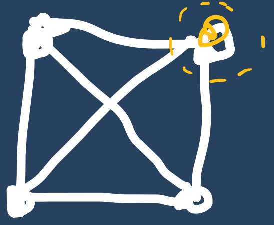
istnieje $\varphi: V \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}^2$

istnieje $\eta_e: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ krzywe bez przecięć

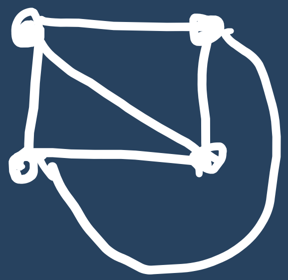
1) η_e: krzywa od $\varphi(x)$ do $\varphi(y)$; $e=\{x,y\}$

2) różne krzywe jeśli mają wspólne punkty, to są to punkty pocz. lub końcowe.

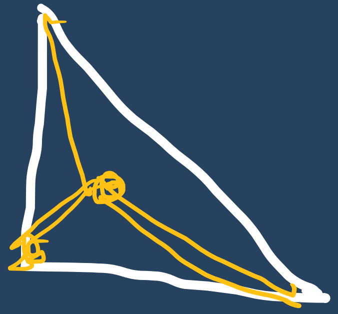
P



K_4

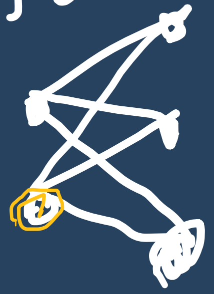


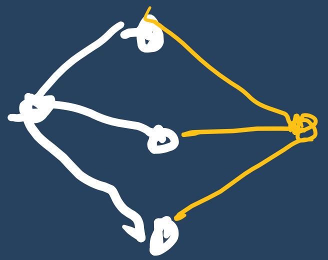
realizację K_4
na płasz.
jako graf planarny



inna realiz. K_4
jako grafu planarnego

P $K_{2,3}$

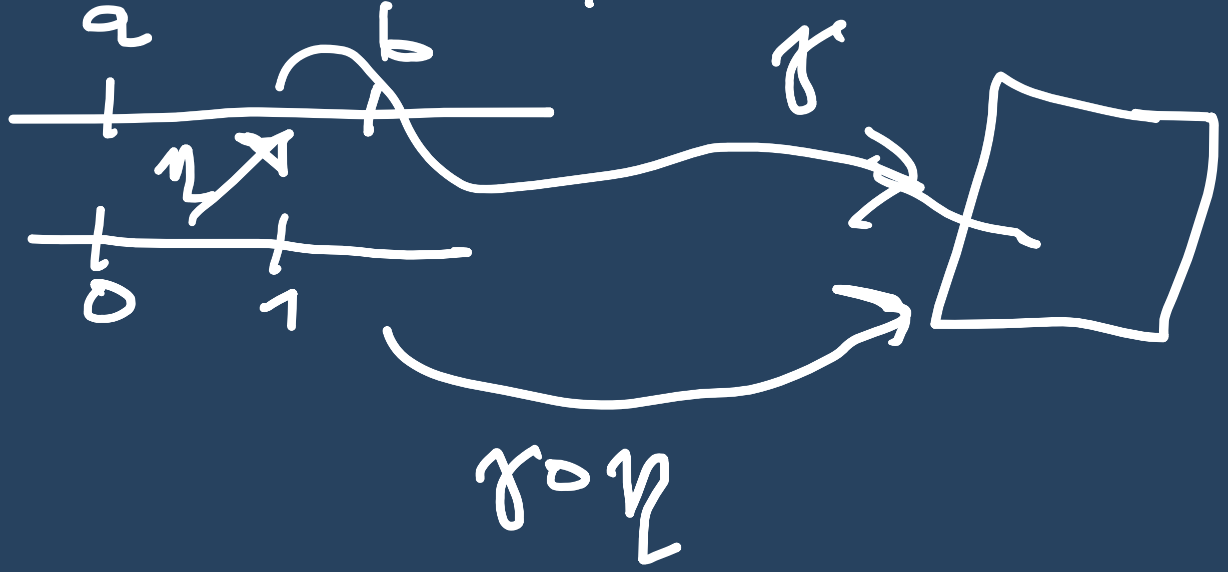


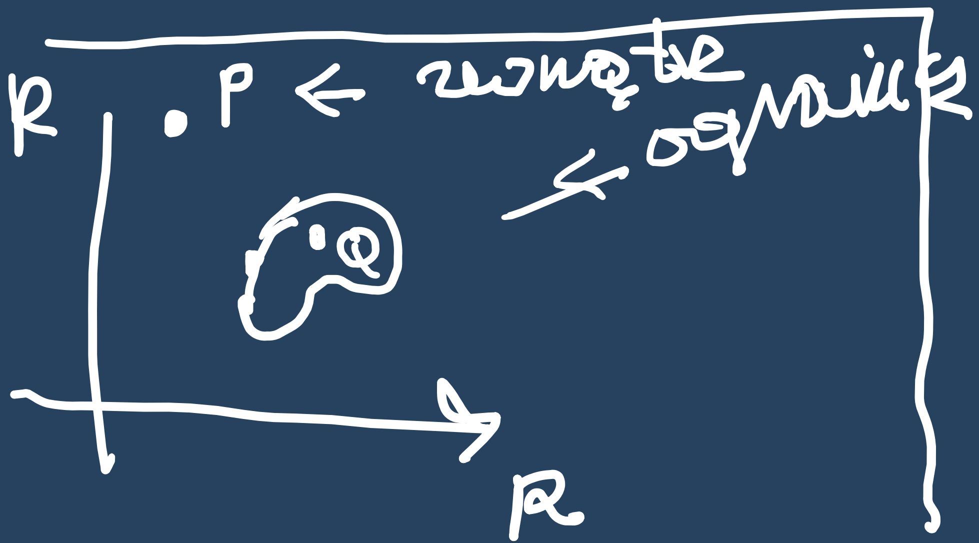


Def. pętla: $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

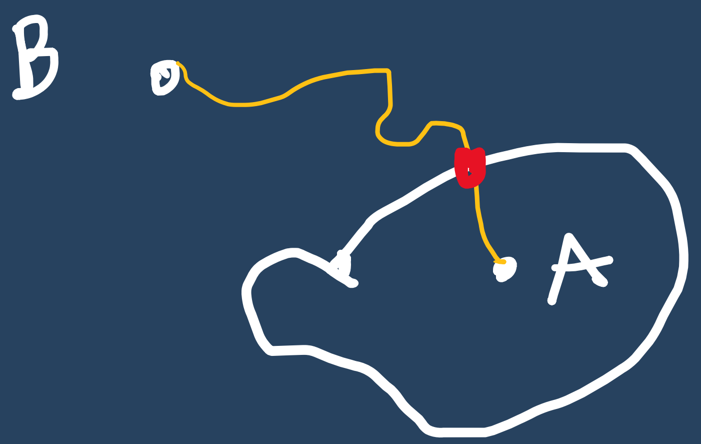
t. że $\gamma(a) = \gamma(b) \wedge \gamma$ na (a,b) jest 1-1

Uwaga: można ogr. się do $[0,1]$



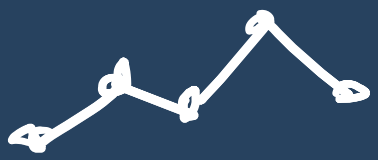


Tw (Jordan). Jeśli P jest pętlą, A leży wewnątrz P, B leży na zewnątrz P i L jest łukiem od A do B to $P \cap L \neq \emptyset$.

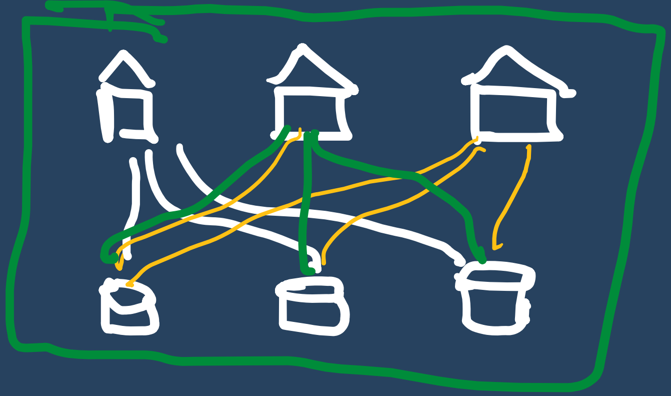


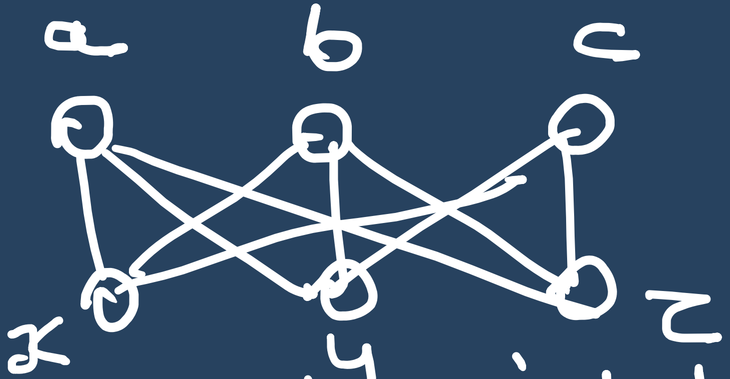
DOWÓD: TRUDNY

Łatwiej to się pokazuje dla wielokątów i łamanych



P

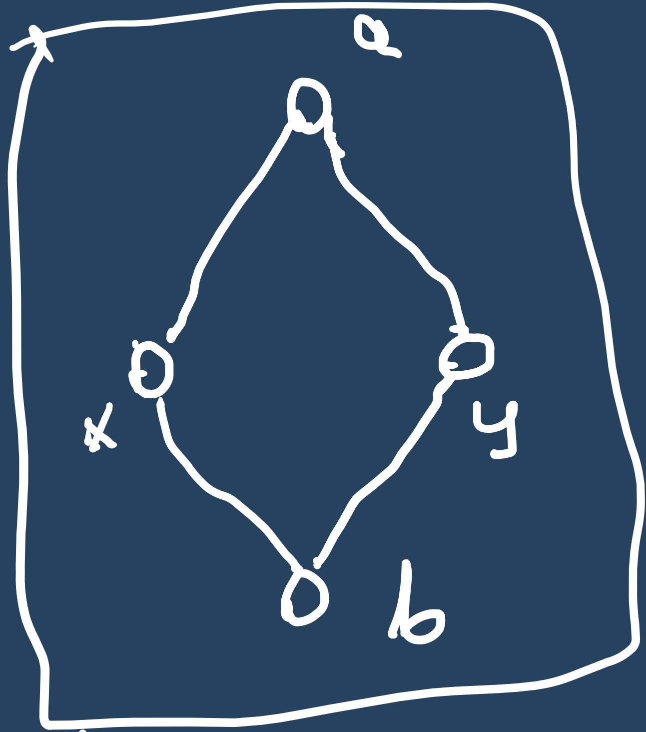




NIE

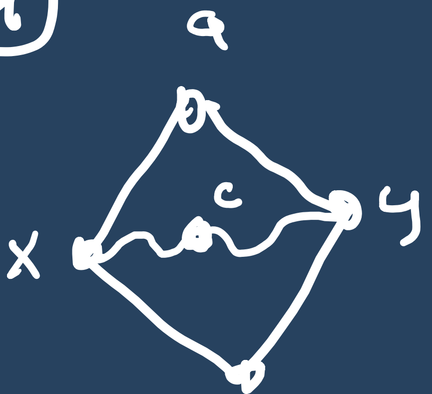
$\Downarrow$

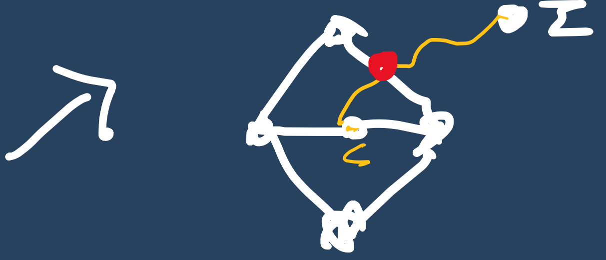
czy $K_{3,3}$ jest planarny?

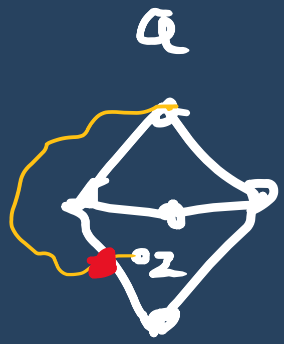


gdzie mogę umieścić C

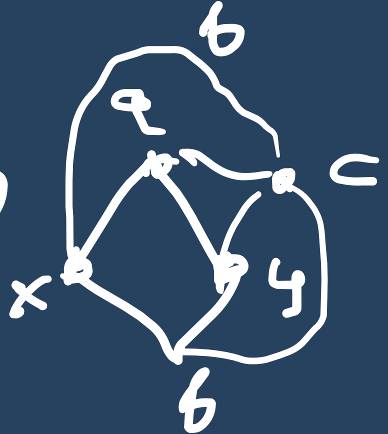
C1







C2



(P) Zadanie K_5 nie jest planarny

Tw. Każde drzewo jest planarne

D-d. indukcja po $n = |V|$.

$(n=1)$ •

$n \to n+1$: Bierzemy (V, E) drzewo

$|V| = n+1$; bierzemy liść $v \in V$.

$V \setminus \{v\}$ - drzewo o n-elem.

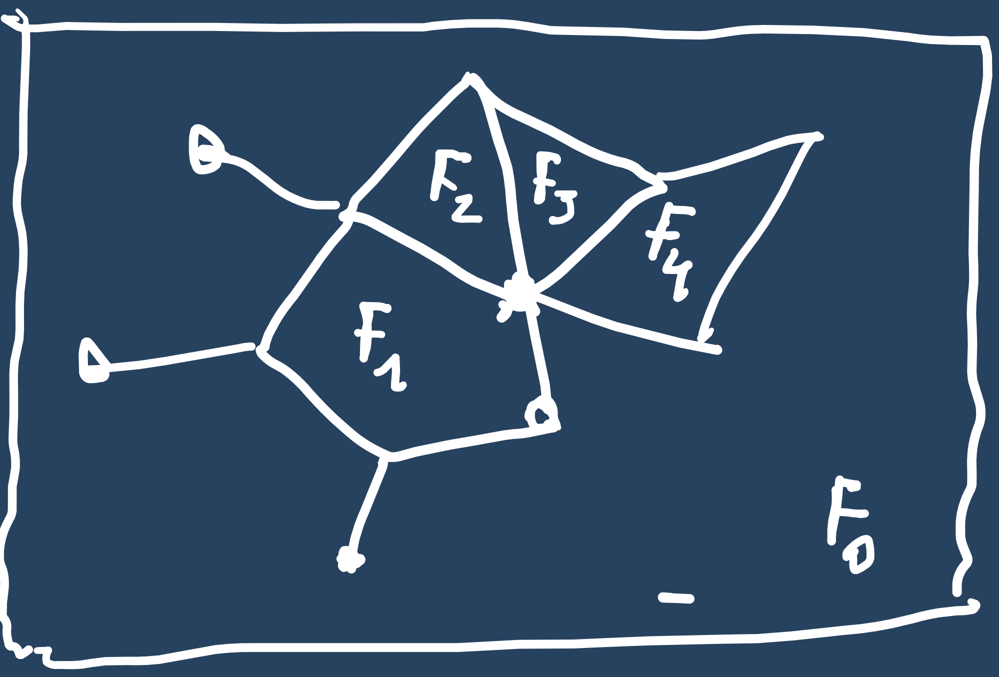
mamy jego realizację $\mathcal{E}$

$V \setminus \{v\}$

$vu \in E$

$$r = \min\{ d(\tilde{u}, \tilde{x}) : x \in V \setminus \{v, u\} \}$$

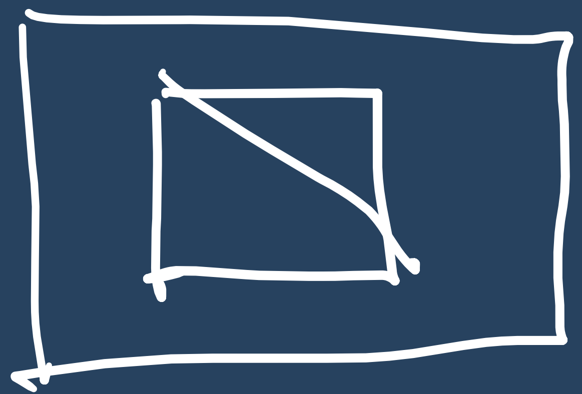
Wn. wszystkie lasy są planarne



$\{F_0, F_1, \ldots, F_4\}$ – ściany grafu (obszary spójne rozbicia $\mathbb{R}^2$ za pomocą grafu)

$f \leftarrow$ liczba ścian
$e \leftarrow$ liczba krawędzi
$v \leftarrow$ liczba wierzchołków

P

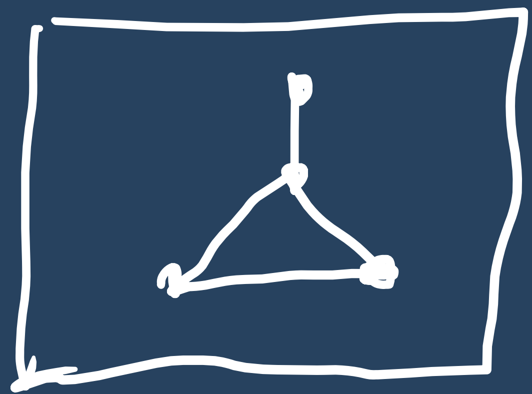


$f = 3$
$e = 5$
$v = 4$

$f - e + v = 3 - 5 + 4 = 2$

$f = 2$
$e = 3$
$v = 3$

$f - e + v = 2$



$f = 2$
$e = 4$
$v = 4$

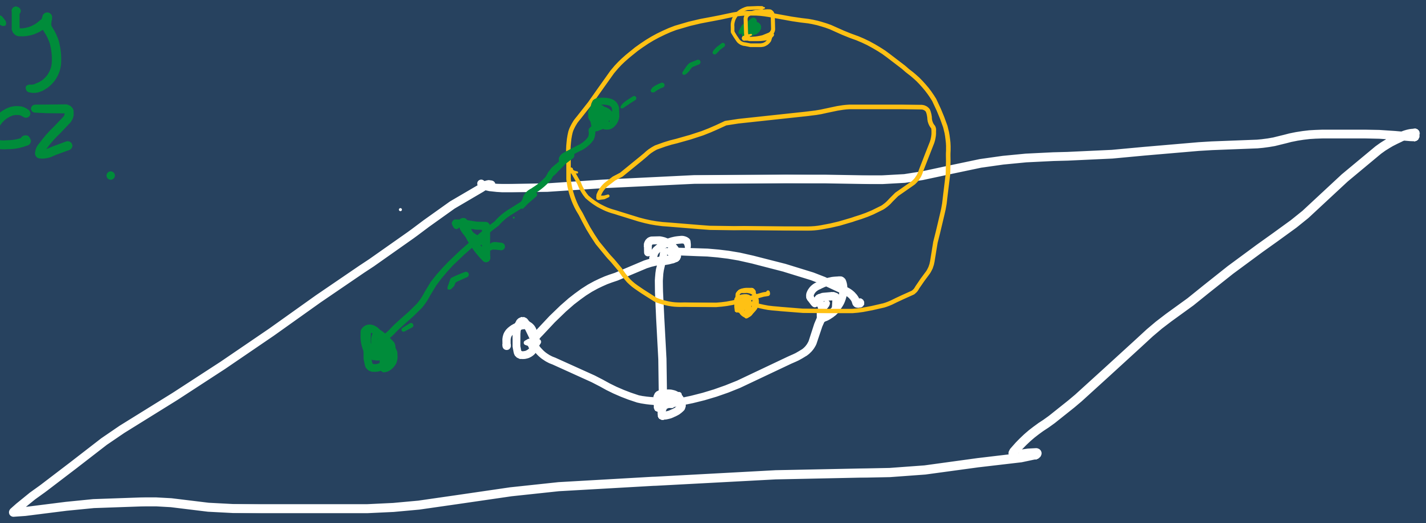
$f - e + v = 2$

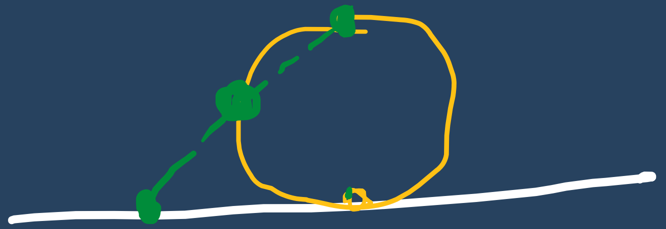
Tw (Euler). Jeśli (V,E) jest SPÓJNYM grafem planarnym, to

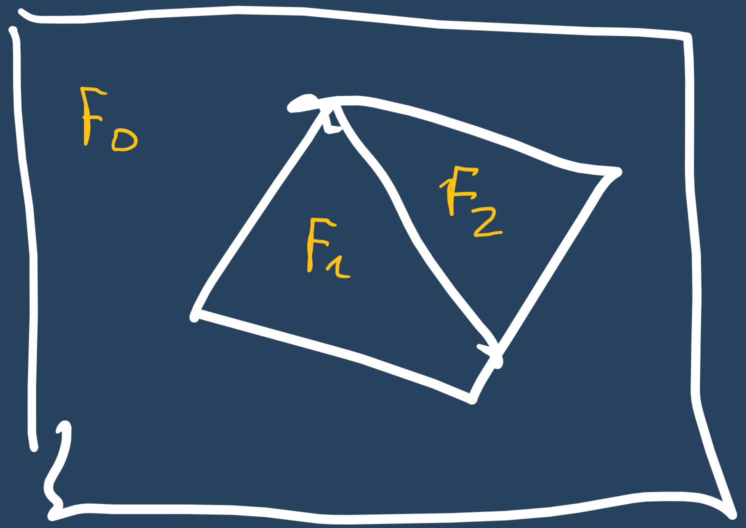
$$f - e + v = 2$$

Planarność a realizacje na sferze

rzut sfery
na płaszcz.






F0
F1
F2