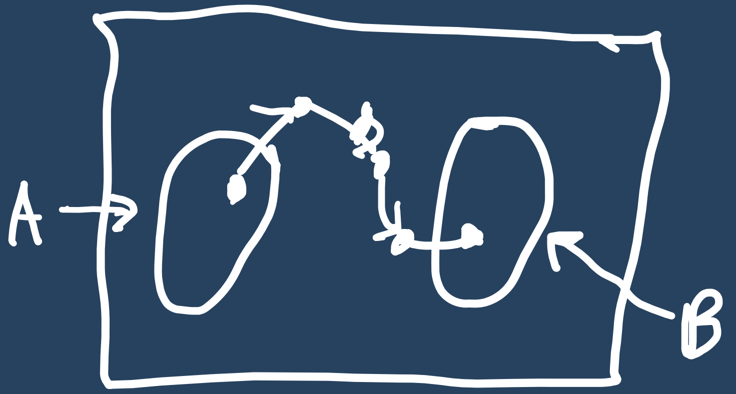
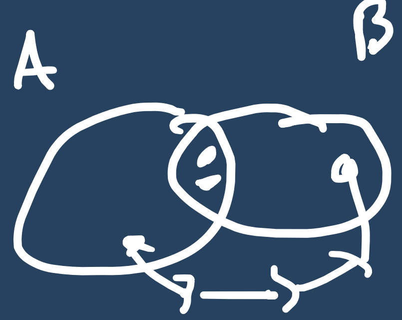
TWIERDZENIE MENGRA

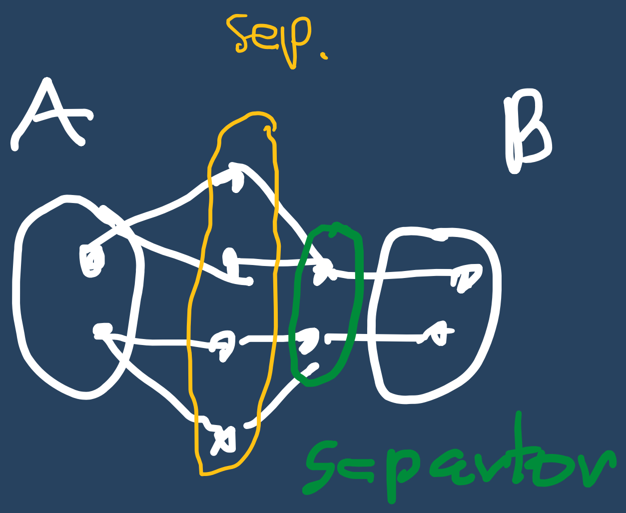
$G=(V,E)$ – prosty, $A, B \subseteq V$



- A–B ścieżka : drogę $x_0 . x_1 \ldots x_n$
  t. że 1) $x_0 \in A$, $x_n \in B$
  2) $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cap (A \cup B) = \emptyset$
- dopuszczamy drogi długości 0 : x_0 : $x_0 \in A \cap B$.



- A-B separator $\equiv$ taki zbiór $S \subseteq V$ że każda A-B ścieżka ma wierzchołek z S.



- $P_1 = (x_1, \dots, x_n)$, $P_2 = (y_1, \dots, y_m)$ } A-B ścieżki

P_1, P_2 są rozłączne $\equiv$

$\{x_1, \dots, x_n\} \cap \{y_1, \dots, y_m\} = \emptyset$

• $\kappa(G, A, B)$ = minimalna moc ~~sep~~ A-B separatora.

Uwaga: $\kappa(G, A, B) \leq \min\{|A|, |B|\}$

Bo: A, B są A-B separatorami

Uwaga: zał. że $\mathcal{P}$ jest rodziną rozłącznych A-B ścieżek. zał. że S jest A-B sep.

Wtedy $|\mathcal{P}| \leq |S|$.

Czyli $|\mathcal{P}| \leq \kappa(G, A, B)$

- $\lambda(G, A, B)$ = maks. moc ~~[illegible]~~ parami rozłącznej rodziny A-B ścieżek

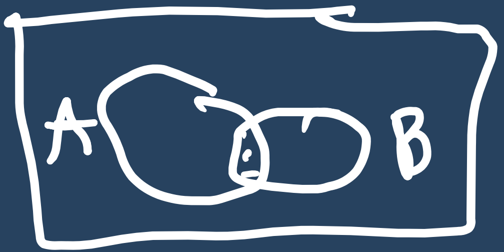
wniosek: $\lambda(G,A,B) \le \kappa(G,A,B)$

TW (MENGER) Dla dowolnego grafu $G=(V,E)$, dowolnych $A, B \subseteq V$ mamy
$$\lambda(G,A,B) = \kappa(G,A,B)$$

1927

D-d (Göring, 2001) Indukcja po $|E|$.

Przypadek: $E = \emptyset$. graf jest pusty



• rozł. ścieżki $\{(a) : a \in A \cap B\}$

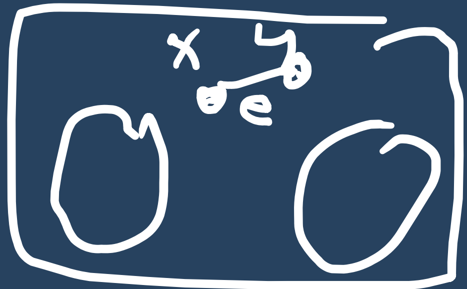
$\lambda = |A \cap B|$

sep: $A \cap B$: $\kappa = |A \cap B|$.

Możemy założyć, że $|E| \neq 0$.

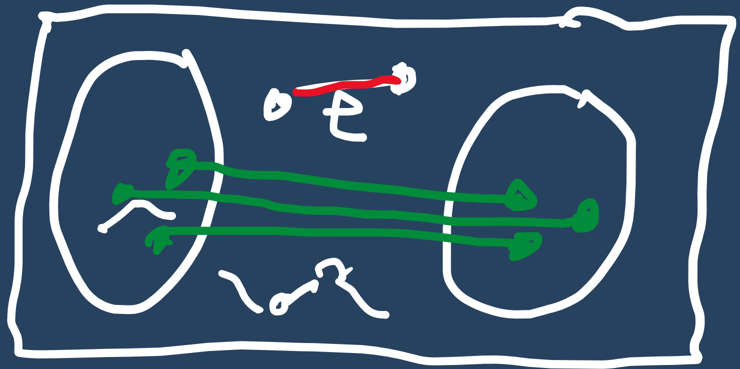
Weźmy $e = xy$, z E.

G



$k = \kappa(G, A, B)$

Jeśli $\kappa(G-e, A, B) = \kappa(G, A, B)$



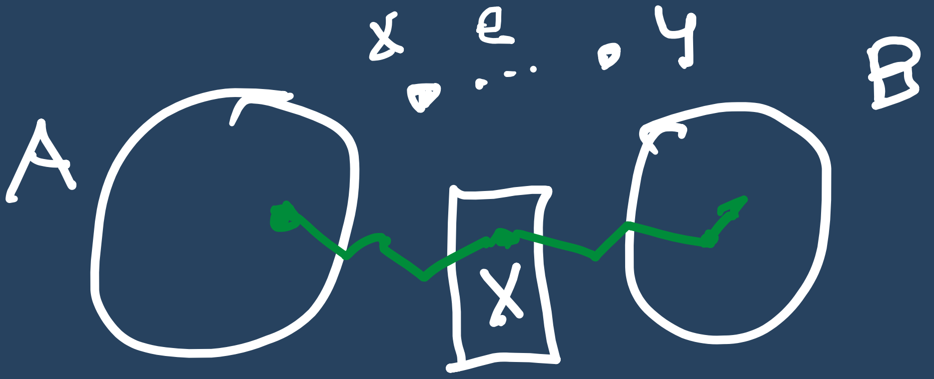
to mamy zbiór $\mathcal{P}$ parami rozł. A–B ścieżek w $G-e$

mocy $\kappa(G, A, e) = s$.

więc i w G mamy zbiór $\mathcal{P}$, $|\mathcal{P}| = s$.

Możemy zał. że $\kappa(G-e, A, B) < \kappa(G, A, B)$

Niech X będzie A-B sep. w $G-e$.



• $X \cup \{x\}$ jest A–B sep. w G.

• $X \cup \{y\}$ jest ~~sep.~~ A–B sep. w G.

• $X \cup \{x\}$:

zał. że Q jest A–B ścieżką w G.

• $x \notin V(Q) \to$ w Q nie ma wykorz. kraw. e

$\to$ Q jest A–B ścieżką w $G-e$.

$\to V(Q) \cap X \neq \emptyset$

$$s \leq |X \cup \{x\}| \leq |X|+1 < s+1 \quad , |X| < s$$

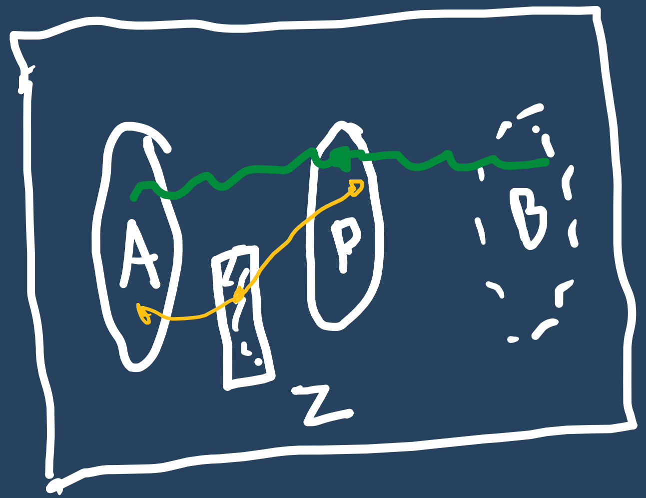
$$s \leq |X \cup \{x\}| \leq s \quad : |X| = s-1$$

ZATEM: • $|X| = s-1$

• $X \cup \{x\}$, $X \cup \{y\}$ są A-B sep. w G.

• $x \notin X$, $y \notin X$.

Niech $P = X \cup \{x\}$, $Q = X \cup \{y\}$



• jeśli Z jest A-P separat. w G-e

to Z jest A-B separatorem

$|Z| \geq s$

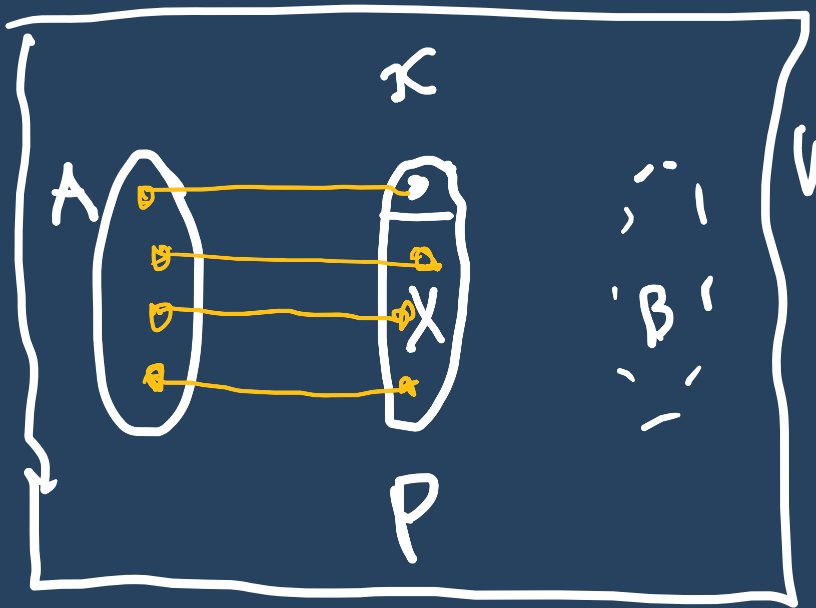
$|P| = s$

$s \geq \kappa(G-e, A, P) \geq s$

$\kappa(G-e, A, B) = s$

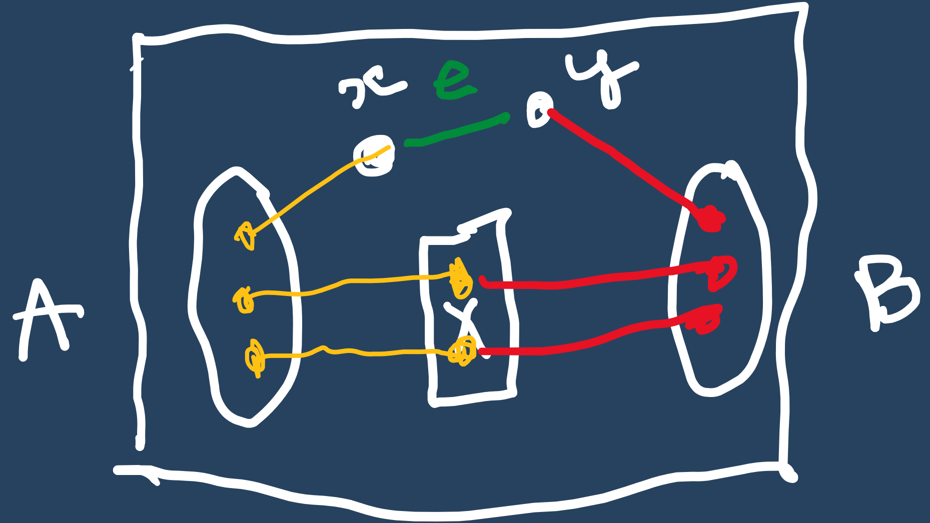
Dla $G-e$ mamy $\kappa(G-e, A, P) = \lambda(G-e, A, B)$

$= s = |X|+1$



Mamy $P_1, \dots, P_s$ A-P scieżek parami rozł. w $G-e$

Mamy $Q_1, \dots, Q_s$ Q-B ściez. parami rozł. w $G-e$.

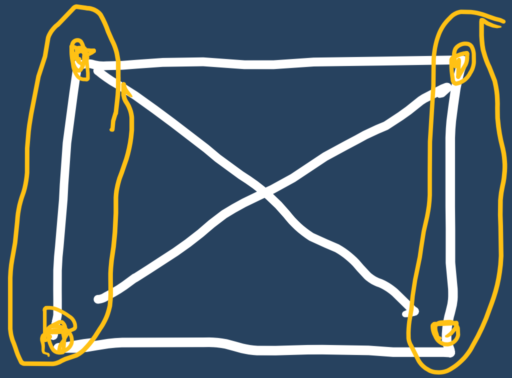


Łączymy P_i z Q_j wyłącznie e.

MAMY s A-B rozł. ścieżek

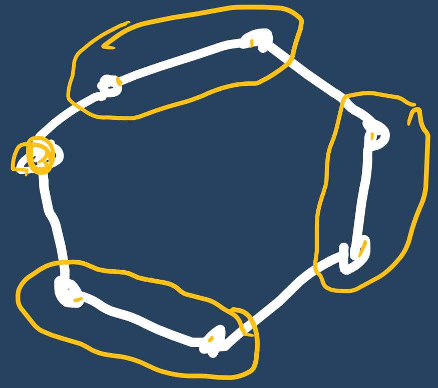
ZASTOSOWANIA

$G=(V,E)$: **skojarzenie** w G $\equiv$ rodzina krawędzi $F \subseteq E$ t. że $e_1, e_2 \in F$, $e_1 \neq e_2 \rightarrow V(e_1) \cap V(e_2) = \emptyset$

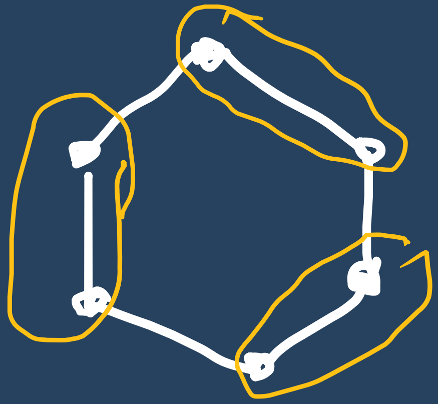


K_4

K_5



C_{2n+1} : skoj. mocy n.

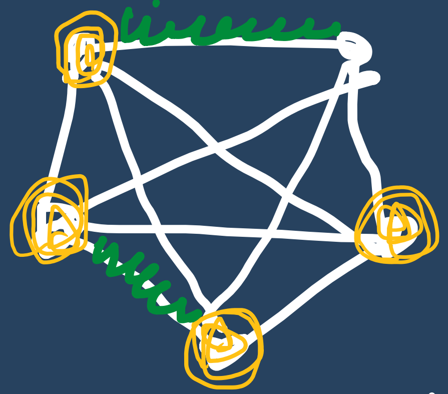


C_{2n} : mamy skoj. mocy n

- $A \subseteq V$ jest pokryciem wierzchołkowe.

$$\Updownarrow$$

$$(\forall e \in E)(|A \cap V(e)| \geq 1)$$



w K_n każde pokrycie wierzch ma $\geq n-1$ elementów

$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ - maks skoj.

Tw. Zał. że $G=(V,E)$ jest grafem dwudzielnym ; $A \dot\cup B = V$, $E \subseteq \{\{a,b\}, a\in A, b\in B\}$

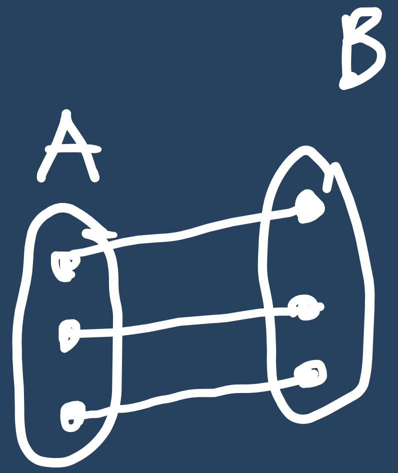
nast. war. są równoważne :

1) $(\exists f)\left(f: A \xrightarrow{1-1} B \wedge (\forall x\in A)\left(\{x, f(x)\}\in E\right)\right)$

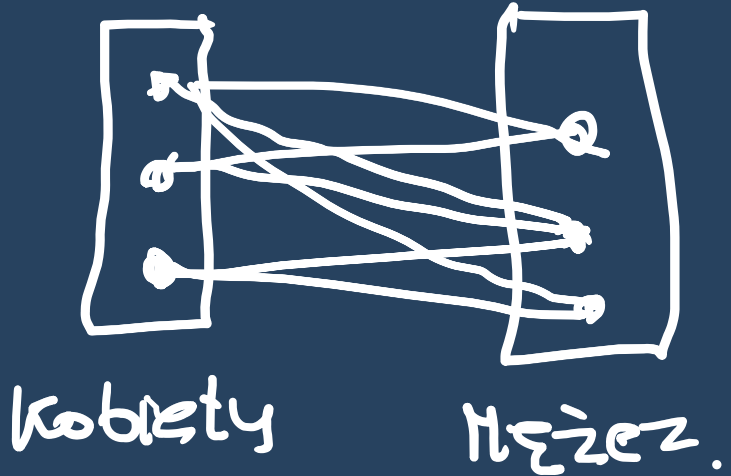
[dosk. A-skoj]

2) $(\forall X\subseteq A)\left(|X| \leq |\mathcal{N}(X)|\right)$

$\mathcal{N}(X) = \{b\in B : (\exists x \in X)(\{x,b\}\in E)\}$.



TW HALL'a o małżeństwach

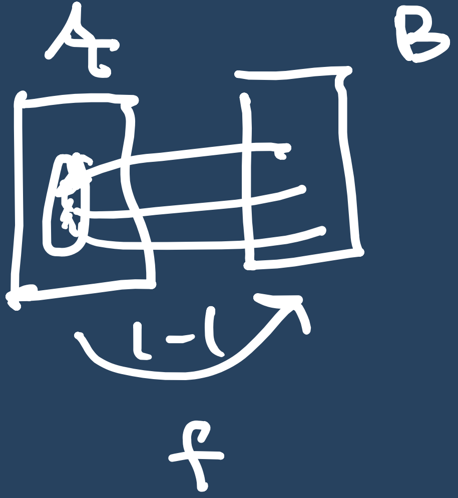


D-d (1) $\longrightarrow$ (2)

$X \subseteq A$

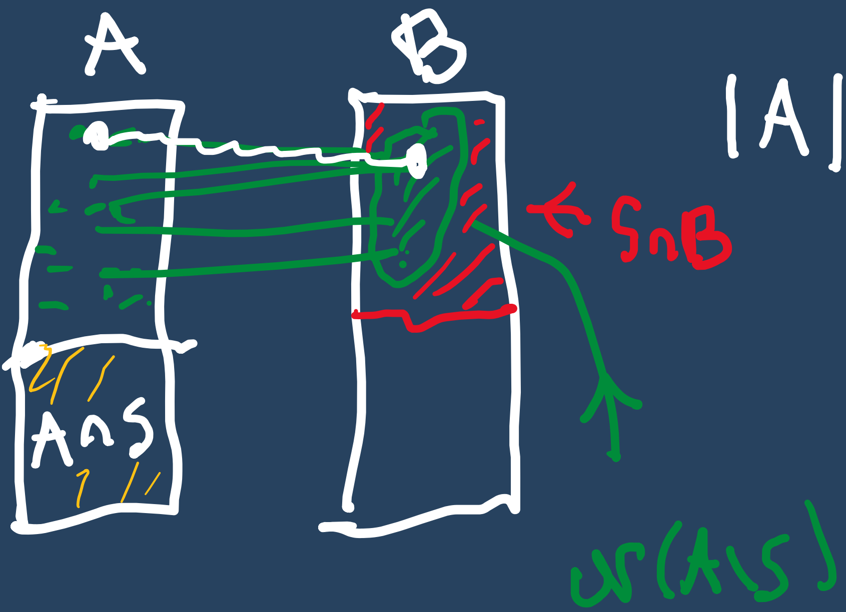
$f[X] \subseteq N(X)$

$|X| = |f[X]| \leq |N(X)|$



(2) $\to$ (1)

Niech S będzie A-B separatorem



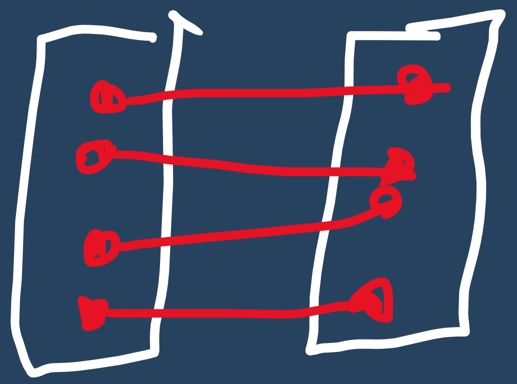
$$|A| = |A \cap S| + |A \setminus S| \leq |A \cap S| + |N(A \setminus S)|$$

$$\leq |A \cap S| + |B \cap S| = |S|$$

- ale A jest A-B sep.
- $\kappa(G, A, B) = |A|$

Korzystamy z tw. Mengera!

$$\lambda(G, A, B) = |A|$$



mamy $|A|$ parami

rozł. A-B ścieżek

mamy więc skojarzenie

A-doskonałe

$\boxtimes$