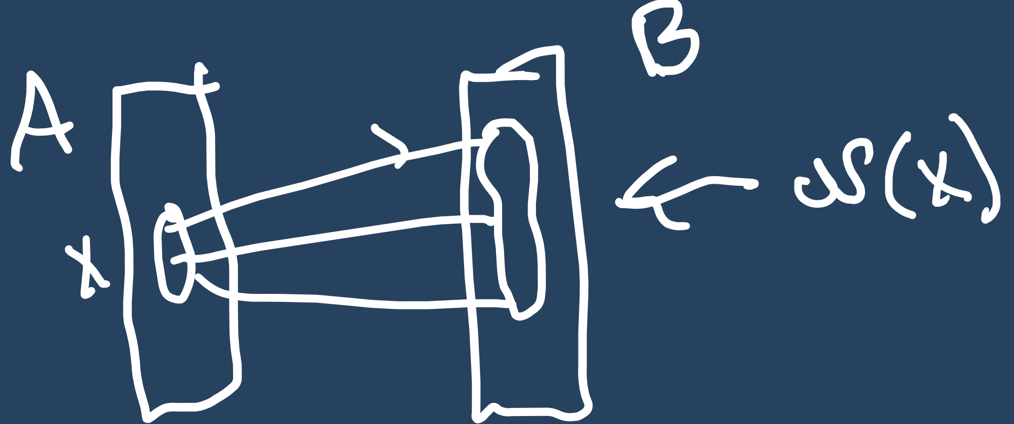
Tw (Hall'a o małżeństwach)

$G = G(A, B)$ $\quad E \subseteq \{\{a,b\} : a \in A \wedge b \in B\}$.

1) $\exists$ A-dosk. skojarzenie w G

$$\left[(\exists f : A \xrightarrow{1-1} B)(\forall a \in A)\{a, f(a)\} \in E \right]$$

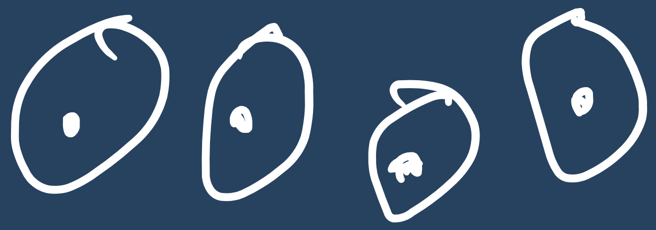
2) $(\forall X \subseteq A)(|N(X)| \geq |X|)$



__Wniosek.__ Zał. że $\{A_k\}_{k=1..n}$ jest rodz. zb. skończ. (A

(1) $(\exists S)\left[(\forall i)\left(|A_i \cap S| = 1\right) \wedge |S| = n\right]$

(2) $(\forall T \subseteq \{1,\dots,n\})\left(\left|\bigcup_{i\in T} A_i\right| \geq |T|\right)$

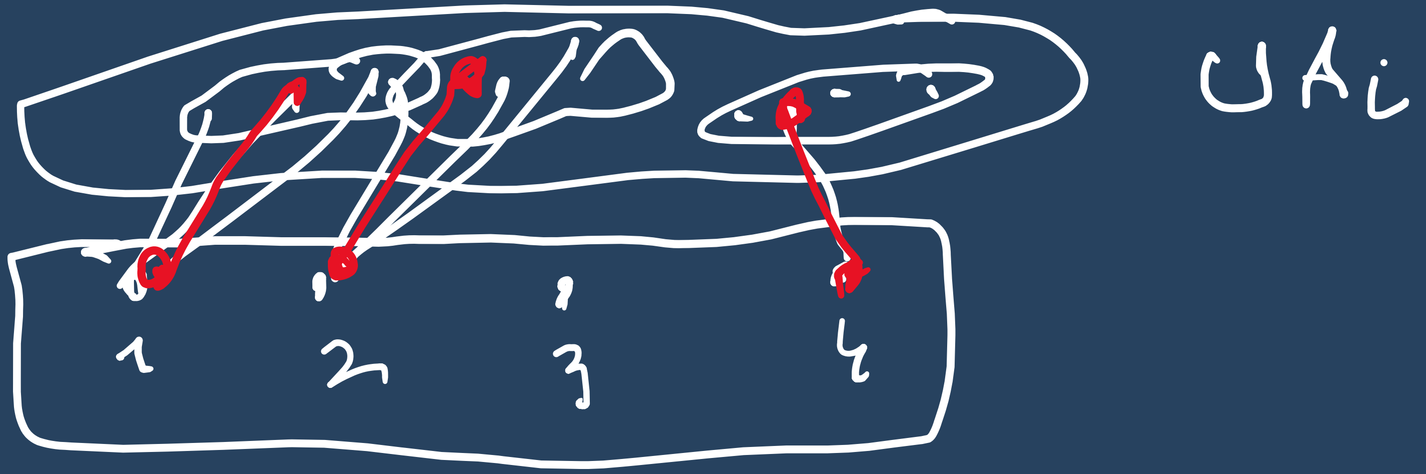


$A_1 = A_2 = A_3 = \{a, b\}$

większy przyp.

D-d. $G = \left(\{1, \dots, n\} \sqcup \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ E\right)$

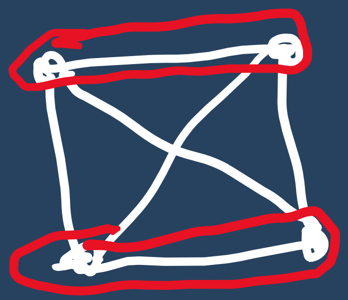
$$E = \left\{ \{i, a\} : i \in \{1, \dots, n\},\ a \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ a \in A_i \right\}$$



Tw Königa

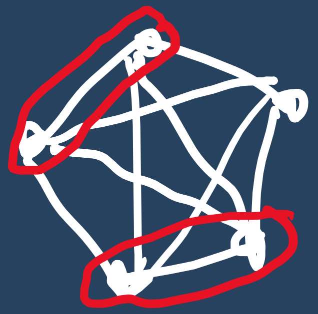
$$\nu(G) = \max\{|E| : \underbrace{E \text{ jest skojarzeniem w } G}_{\substack{\equiv \\ \text{zbiór krawędzi t. że}}}\}$$

$$\left.\begin{array}{l} e_1, e_2 \in E \\ e_1 \neq e_2 \end{array}\right\} \rightarrow e_1 \cap e_2 = \emptyset$$



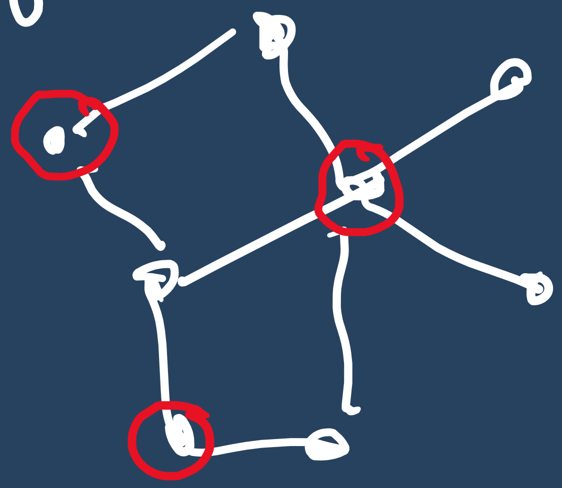
K_4

$\nu(K_4) = 2$



$\nu(K_5) = 2$

$$\tau(G) = \min\{|A| : \underbrace{A \text{ jest pokryciem wierzchołków}}_{(\forall e \in E)(A \cap e \neq \emptyset)}\}$$



$\tau(K_5) = 4$

$\nu(K_5) = 2$

$\tau(K_n) = n - 1$

FAKT: $\nu(G) \leq \tau(G) \leq 2\cdot\nu(G)$

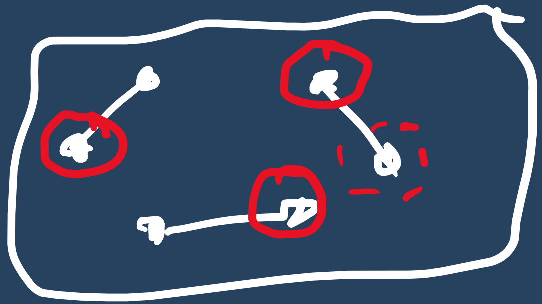
skoj. pokr.

D-d. (1) A – pokr. wierz. i $\mathcal{E}$ – skojarzenie.

$$|\mathcal{E}| \leq |A|$$

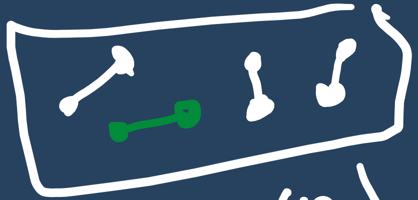
$$\sup_{\mathcal{E}} |\mathcal{E}| \leq |A|$$

$$\sup_{\mathcal{E}\text{-sk.}} |\mathcal{E}| \leq \inf_{A\text{-pokr.}} |A|$$



(2) $\mathcal{E}$ – maks. skoj.

$A = \bigcup \mathcal{E}$; $|A| = 2\cdot|\mathcal{E}|$; A – pokrycie;

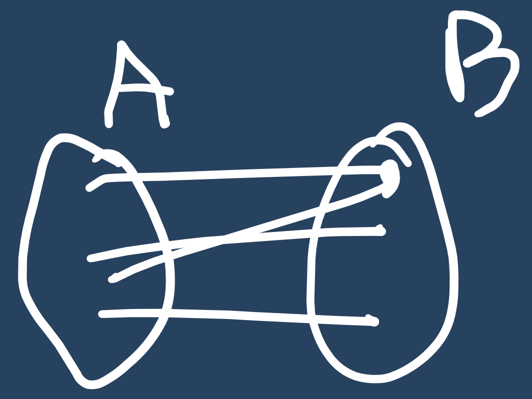


gdyby $uv \in E(G)$, $u,v \notin A$

$\mathcal{E} \cup \{\{u,v\}\}$ – skoj.

Tw (König). Jeśli G jest dwudzielny to

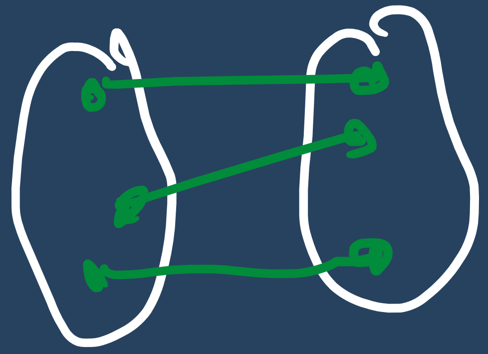
$$\tau(G) = \nu(G)$$



D-d. $G \in \mathcal{G}(A, B)$

stosujemy tw Mengera do pary (A, B)

- A, B - konektor $\equiv$ skojarz



- A, B - sep. $\equiv$ pokr. wierzch.

Tw. DILWORTHA.

$(X, \leq)$ - cz. porz.

1) $L \subseteq X$ jest łańcuchem

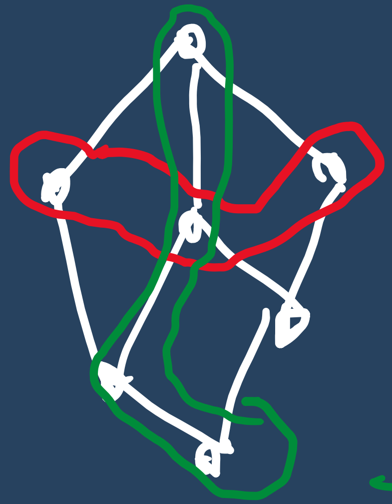
$\Updownarrow$

$(\forall a,b \in L)(a \leq b \vee b \leq a)$

2) $A \subseteq X$ jest anty-łańcuchem

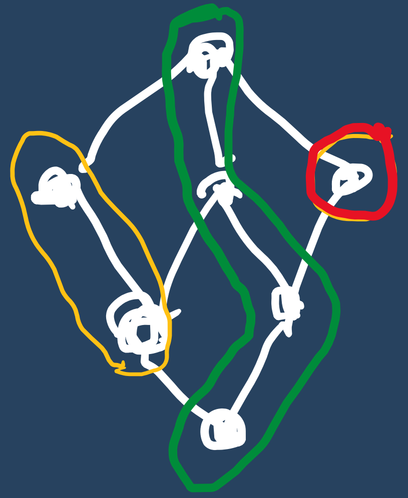
$\Updownarrow$

$$(\forall a,b \in A)\left(a \neq b \rightarrow \left(\underbrace{\neg(a \leq b) \wedge \neg(b \leq a)}_{\neg(a \leq b \,\vee\, b \leq a)}\right)\right)$$

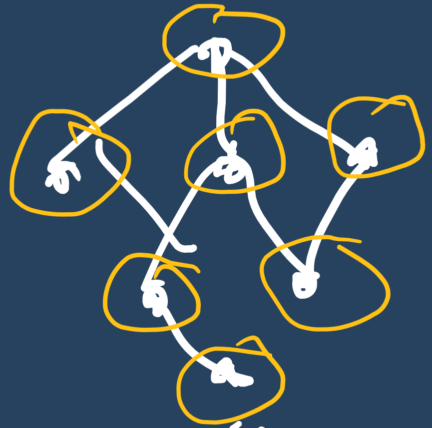


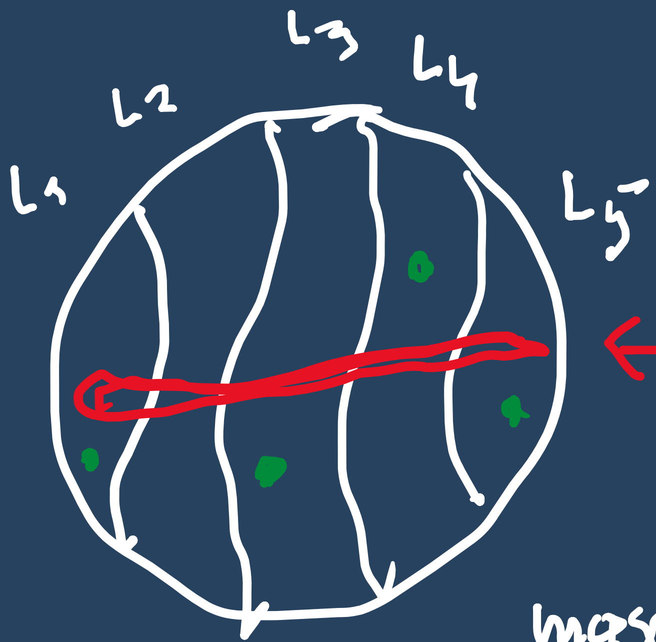
antyłańcuch

- łańcuch



← rozbicie na 3 łańcuchy





← A antył.

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$$

$$|L_1 \cap A| \leq 1$$

$$|A| \leq n$$

$$\max\{|A| : A\text{-antył.}\} \leq \min\{|\mathcal{L}| : \mathcal{L}\text{-rozb. na łańcuchy}\}$$

Tw (Dilworth) Dla dow. cz. porz. nadzbioru X

$$\max\{|A| : A\text{-antył. w } X\} = \min\{|\mathcal{L}| : \mathcal{L}\text{ - rozb. } X \text{ na łańc.}\}$$

D-d. Ustalmy cz. porz $(X, \leq)$; $|X| = n$

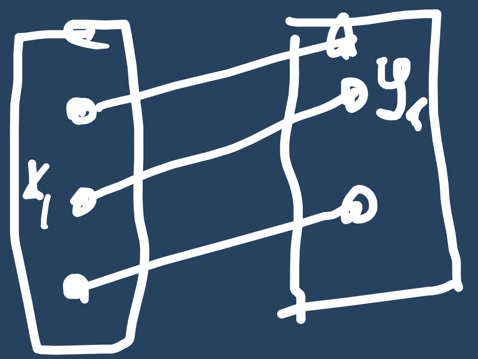
Robimy pewien graf dwudzielny.

$x^- = (x, 0)$, $x^+ = (x, 1)$

$V = \{x^- : x \in X\} \,\dot\cup\, \{x^+ : x \in X\}$.

$E = \{\{x^-, y^+\} : x < y\}$.

$X \times \{0\}$ $X \times \{1\}$



$X = \{1, \dots, n\}$

Korzystamy z tw. Königa.

niech L będzie skoj. minimalnej mocy

$l = |L|$.

$L = \{e_1, \dots, e_l\}$

$\mathcal{L}_0$: 1 2 3 ... n−1 n

$\mathcal{L}_1$: 1 $2 \to 3$ 4 ... n

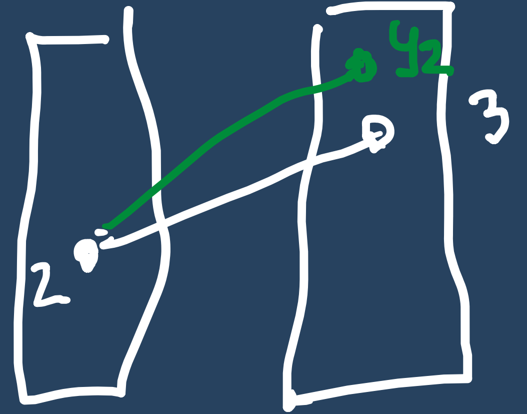
bierzemy $e_1 = (x_1, y_1)$

np $e_1 = (2, 3)$

$\mathcal{L}_1$: (1) (2 3) (4) (5) (6) .... (n)

patrzymy na $e_2 \doteq (x_2, y_2)$

? $x_2 = 2$: nie może, bo L jest skojarz.



czyli może być:

(1) (2 3) (4) (5) (6) ...

lub

(1) (2 3) (4) (5) (6)

$\mathcal{L}_2$ {
w1 (1) (2 3 5) 4 6 .. (n)
w2 (1) (2 3) 4 (5 6) .. (n)

L_i

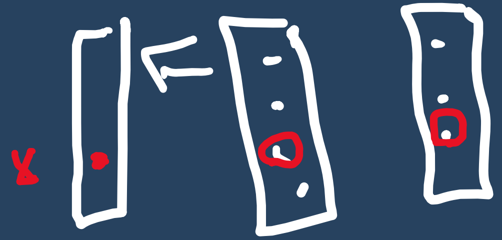
L_{i+1}

ZA KAŻDYM RAZEM ZMN. LICZBĘ KOLUC. O 1

Po l krokach otrzymamy $n-l$ kolic.

- Bierzemy pokrycie wierz. A mocy l. X $X^- \cup X^+$

$$B = \{x \in X : x^- \in A \vee x^+ \in A\}$$



CLAIM: $|B| \le |A|$

zatem $|B| \le l$.

niech $C = X \setminus B$.

$x \in C \longleftrightarrow x^- \notin A \wedge x^+ \notin A$.

weźmy $x, y \in C$, $x \neq y$:

1) $x < y$: $(x^-, y^+) \in E$

$\rightarrow x^- \in A \vee y^+ \in A$: niemożli.

2) $y < x$: niemożliwe

C – antył.

ALE: $|B| \leq l$

WIĘC: $|C| \geq n - l$.

ZATEM:

- mamy rozbicie na łańc. mocy $n-l$
- mamy antył. mocy $\geq n - l$

$\blacksquare$

Przykład (Erdős - Szegedy). Zał. że $r, s \geq 1$.

Zał. że mamy ciąg $(x_i)_{i=1 \dots rs+1}$ różn.

liczb. rzeczywistych. Jest podciąg rosnący

długości r lub malejący dług. s tego

ciągu.

P $r = s = 2$: $x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5$

$\exists\, l < j \quad x_l < x_j$

lub $\exists\, l < j \quad x_l > x_j$

Rozw. Na zbiorze $X = \{(i, a_i) : i = 1 .. r\cdot s+1\}$

wprow. cz. porz.

$$(i,x) \preccurlyeq (j,y) \equiv (i \le j \wedge x \le y)$$

- zał. że mamy łańcuch $i_1 < i_2 < .. < i_k$

$$(i_1, x_{i_1}) < (i_2, x_{i_2}) < \dots$$

$$x_{i_1} < x_{i_2} < .. < x_{i_k}$$

- zał. że nie ma łańc. dług r.

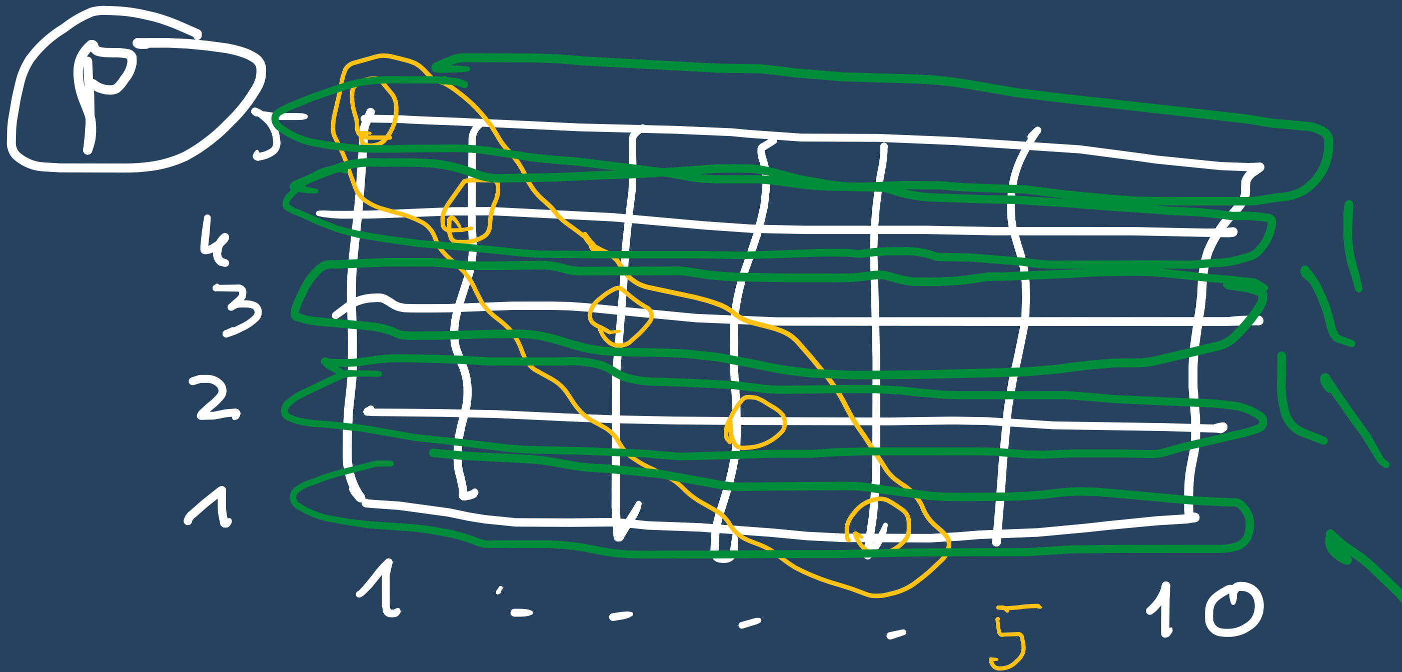
$r' =$ dług. maks. łańcucha, $r' < r$.

Bierzemy rozbicie minimalne $\mathcal{L}$ na łańcuchy

$$r\cdot s+1 \le |\mathcal{L}| \cdot r' \quad ; \quad |\mathcal{L}| \ge \frac{r\cdot s+1}{r'} > s.$$

Zwiększ. antyłańc. mocy > 5,

to jest ciągiem malejącym.



$X = \{1..10\} \times \{1..5\}$.

? max antyłańc. ?

$(x,y) \leq (x',y') \equiv x \leq x' \wedge y \leq y'$

$|\mathcal{L}| = 5$

Łańc.