RACHUNEK ZDAŃ

Język rach. zdań:

- kolekcja zmiennych zdaniowych

np. $\mathcal{P} = \{p, q, r, s, t\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, \dots\}$

- spójniki logiczne:

  $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$

- nawiasy: (,)

Konstr. $\mathcal{L}(\mathcal{P})$: 1) $p \in \mathcal{P} \Rightarrow$ p jest zdaniem

2) $\top, \bot \longrightarrow$ to też jest zdaniem

3) jeśli φ, ψ są zdaniami to

$$(\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \to \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi), (\neg \varphi)$$

są zdaniami

4) φ jest zdaniem, jeśli jest otrzymane w skończonej liczbie kroków z (1), (2), (3)

$\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$: binarne

$\neg$: unarny

$\mathcal{P}$

1) $p, q, r, \perp, \top$ zdania — prawda

2) $(p \vee r), (q \vee \perp), (\perp \to \top), (\neg p)$ — fałsz

3) $((p \vee r) \wedge (\neg p))$, itd

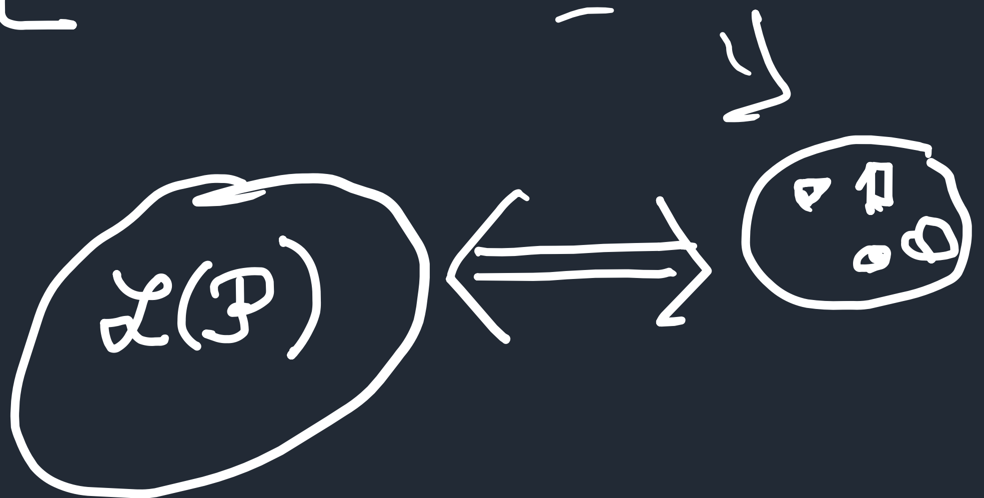
4) $p, (\neg p), (\neg(\neg p)), (\neg(\neg(\neg p))), \ldots$

5) $\perp, (\neg \perp), (\neg(\neg \perp)), (\neg(\neg(\neg \perp)))$

$\mathcal{L}(\mathcal{P})$

WARTOŚCI LOGICZNE

$$\begin{cases} \mathbb{1} : \text{prawda} \\ \mathbb{0} : \text{fałsz} \end{cases}$$



WALUACJA:

$$\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$$

P $\mathcal{P} = \{p, q, r\}$

1) $\pi(p) = \pi(q) = \pi(r) = \mathbb{0}$

2) $\pi(p) = \pi(q) = \pi(r) = \mathbb{1}$

3) $\pi(p) = \mathbb{0}$, $\pi(q) = \mathbb{1}$, $\pi(r) = \mathbb{0}$

	p	q	r
π	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{0}$

CEL: mamy $\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \{0, 1\}$

CHCEMY ROZSZERZYĆ π na $\mathcal{L}(\mathcal{P})$

1) jeśli $p \in \mathcal{P}$; $\hat{\pi}(p) = \pi(p)$
2) $\hat{\pi}(\top) = 1$, $\hat{\pi}(\bot) = 0$

$\wedge$	$\boldsymbol{\wedge}$
$\vee$	$\boldsymbol{\vee}$
$\rightarrow$	$\boldsymbol{\rightarrow}$
$\leftrightarrow$	$\boldsymbol{\leftrightarrow}$
$\neg$	$\boldsymbol{\neg}$

binarne

unarne

działania logiczne

spój. log.

X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \rightarrow Y$	$X \leftrightarrow Y$	$\neg X$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

$\neg 1 = 0$

$\neg 0 = 1$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\neg"] & 1 \arrow[l, bend left, "\neg"] \end{tikzcd}$$

3) $\tilde{\pi}((\varphi \wedge \psi)) = \tilde{\pi}(\varphi) \wedge \tilde{\pi}(\psi)$

$\tilde{\pi}((\varphi \to \psi)) = \tilde{\pi}(\varphi) \to \tilde{\pi}(\psi)$

- - - - - -

$\tilde{\pi}((\neg\varphi)) = \neg\, \tilde{\pi}(\varphi)$

Dygresja:

rekursja

```
val (f : formula, w : waluacja) {
    if (f ∈ P) { return w(f); }
else ....
    if (f = "(f1 v f2)") { return OR(val(f1, w), val(f2, w)) }
    :
}
```

Def. Zdanie $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ jest TAUTOLOGIĄ jeśli dla dowolnej waluacji $\pi : P \longrightarrow \{0, 1\}$ mamy

$$\pi(\varphi) = 1.$$

$\models$ modeluje

Oznaczenia:

1) φ jest tautologią
2) $\models \varphi$

zapis: $\tilde{\pi}(\varphi) = 1 \equiv \pi \models \varphi$

PRZEGLĄD PODSTAWOWYCH TAUTOLOGII

1) $\models ((p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p))$ } przemienność alter.

$\models ((p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p))$ } — " — koniunkcji

dygresja: $12/6*3$

$(12/6)*3 \leftarrow$ jednoznaczne

$$\models \overbrace{((p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p))}^{\varphi}$$

wystarczy znać valuację w dla $w(p)$, $w(q)$.

	p	q
$\pi \to$	1	1
	1	0
	0	1
	0	0

1) $\pi(p) = \pi(q) = 1$

$$\tilde{\pi}(\varphi) = \tilde{\pi}(p \vee q) \Leftrightarrow \tilde{\pi}(q \vee p)$$

$$= (\tilde{\pi}(p) \vee \tilde{\pi}(q)) \Leftrightarrow (\tilde{\pi}(q) \vee \tilde{\pi}(p))$$

$$= (1 \vee 1) \leftrightarrow (1 \vee 1) = 1 \Leftrightarrow 1 = 1.$$

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	φ
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	1

Tabelka
0 – 1

$$\models (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$$

$$\varphi = (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$$

Uwaga: $\varphi = \varphi(p_1, p_2, \dots, p_{40})$

$(p_1 \vee p_2) \vee \neg(p_3) \vee \dots$

Q: ile wierszy musi mieć ta tabelka?

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{40} = 2^{40} = (2^{10})^{4}$$

$$\simeq (10^3)^4 = 10^{12}.$$