ZBIORY - 11

(P) Dla dowolnych zbiorów A i B mamy

$$A \cup B = B \cup A$$

D-d. Ustalmy dowolne x. Wtedy

$$x \in A \cup B \overset{def}{\equiv} x \in A \vee x \in B \overset{\models}{\equiv} x \in B \vee x \in A \overset{def}{\equiv} x \in B \cup A$$

Zatem

$$x \in A \cup B \equiv x \in B \cup A,$$

zatem, na mocy AE mamy $A \cup B = B \cup A$ $\square$

Ⓟ Pok, że $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

D-d. Ustalamy x. Wtedy

$$x\in A\cap(B\cap C)\overset{def}{\equiv} x\in A\wedge x\in B\cap C \overset{def}{\equiv}$$

$$\equiv \underbrace{x\in A}_{p}\wedge(\underbrace{x\in B}_{q}\wedge\underbrace{x\in C}_{r}) \overset{\models}{\equiv}$$

$$\equiv (x\in A\wedge x\in B)\wedge x\in C \overset{def}{\equiv}$$

$$\equiv x\in A\cap B\wedge x\in C \overset{def}{\equiv}$$

$$\equiv x\in(A\cap B)\cap C$$

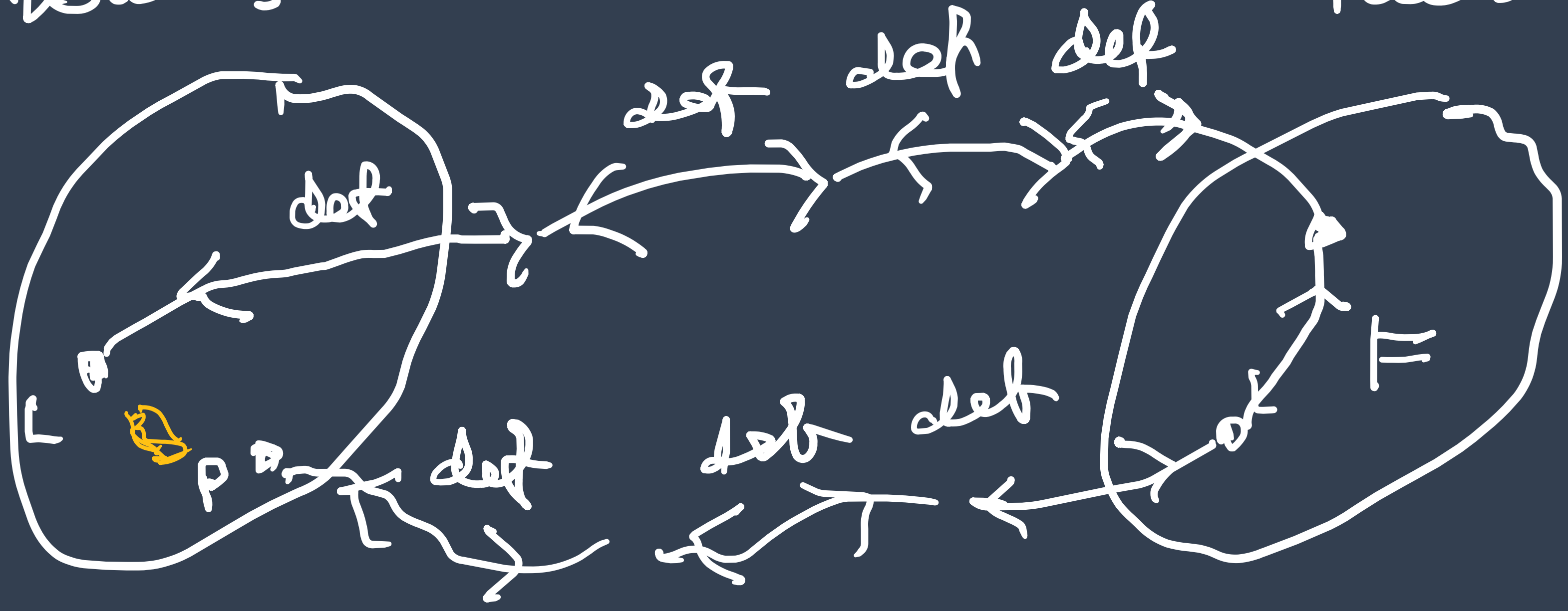
$\models(p\wedge(q\wedge r))\longleftrightarrow$
$((p\wedge q)\wedge r)$

Więc, dla dowolnego x mamy

$$x\in A\cap(B\cap C)\equiv x\in(A\cap B)\cap C,$$

ZATEM: $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ □

zbiory   rach zdań



Redukcja problemów Rach Zbiorów
do Rachunku zdań.

Kartezjusz: geometria } $\xrightarrow{\text{red.}}$ geometria analityczna

△ /, O X

$ax+by+c=0$

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Tautologie	Zbiory	
$\models (p\wedge p) \leftrightarrow p$	$A \cap A = A$	idemp. $\wedge$
$p \vee p \leftrightarrow p$	$A \cup A = A$	
$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$A \cap B = B \cap A$	
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p\wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	

$\vdots$

(P) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

$$x \in (A \setminus B) \setminus C \equiv x \in A \setminus B \land \neg\, x \in C$$

$$\equiv (x \in A \land \neg\, x \in B) \land \neg\, x \in C$$

$$\equiv (x \in A) \land (\neg\, x \in B \land \neg\, x \in C)$$

$$\equiv (x \in A) \land \neg (x \in B \lor x \in C)$$ Łączn. $\land$

$$\equiv x \in A \land \neg (x \in B \cup C)$$ prawo de Morg

$$\equiv x \in A \setminus (B \cup C).$$

UWAGA: mamy podanie $L = B$

$x \in L \equiv \ldots \equiv \varphi(x) \equiv \varphi^* \in \mathcal{L}(\{p,q,r\})$

$x \in P \equiv \ldots \equiv \psi(x) \equiv \psi^* \in \mathcal{L}(\{p,q,r\})$

$x \in A \rightsquigarrow p$

$x \in B \rightsquigarrow q$

$x \in C \rightsquigarrow r$

CZY $\models (\varphi^* \leftrightarrow \psi^*)$?

Ostatnia deska ratunku: tabelka 0-1.

1) TAK ; koniec rozumowania

2) NIE : jest kontrprzykład.

p	q	r	φ^*	ψ^*
1	0	1	1	0

$A = \{a\}$, $C = \{c\}$, B – dowolne

- Inkluzja (zawieranie)

$$A \subseteq B \equiv \text{dla dowolnego } x \text{ mamy } x \in A \to x \in B$$

- $A \subseteq A$ dla dowolnego A
- $A \subseteq A \cup B$ — " — A, B
- $A \cap B \subseteq A$

c $\models p \to (p \vee q)$

$\models (p \wedge q) \to p$

Z

- $\begin{cases} A_1 \subseteq B_1 \\ A_2 \subseteq B_2 \end{cases} \to \begin{cases} A_1 \cup A_2 \subseteq B_1 \cup B_2 \\ A_1 \cap A_2 \subseteq B_1 \cap B_2 \end{cases}$

Z

Tw. Dla dowolnych zbiorów A, B

1) $A \subseteq B$

2) $A \cup B = B$

3) $A \cap B = A$

D-d $(1) \longrightarrow (2)$ Zał (1). Oczywiście $B \subseteq A \cup B$. Musimy pok. że $A \cup B \subseteq B$. Weźmy ustalony x.

$$x \in A \cup B \equiv x \in A \vee x \in B \overset{\text{zał}}{\Longrightarrow} x \in B \vee x \in B$$

$$\equiv x \in B \quad \blacksquare$$

(2) → (3) Zał. że $A \cup B = B$. Musimy pok. że

$A \cap B = A$. Oczywiście $A \cap B \subseteq A$.

Musimy pok. że $A \subseteq A \cap B$.

$$A \cap B \overset{\text{zał}}{=} A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) =$$

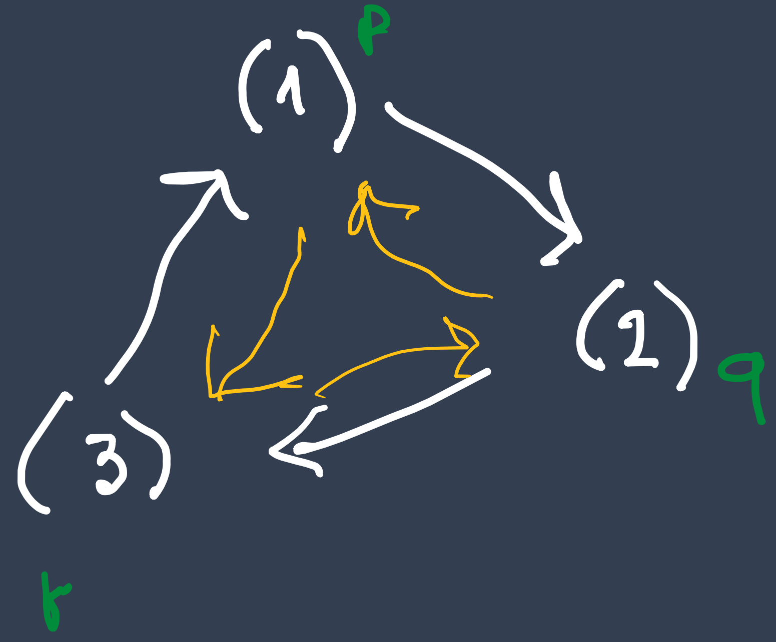
$$= A \cup (A \cap B) \supseteq A \; \blacksquare$$

z (AE) mamy tezę.

(3) → (1) Zał. że $A \cap B = A$. CEL: $A \subseteq B$.

Bierzemy x. $\quad \models ((p \wedge q) \to q)$

$$x \in A \equiv x \in A \cap B \equiv x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B \; \blacksquare$$



$\models \left[(p\to q)\wedge(q\to r)\right]\to(p\to r)$

przech. implikację

Rez rezolucję

$p\to q \equiv \neg p\vee q$

$$\frac{\neg p\vee \cancel{q},\ \neg \cancel{q}\vee r}{\neg p\vee r}$$

OGÓLNIEJ :

mamy pok. że nast zdania są równow !

1) φ_1

2) φ_2

$\vdots$

n) φ_n

rozumowania
Round Robin

„dookoła wojtka"

- rozumowanie bezpośr

  $n \cdot (n-1)$

- metoda RR:

  n - rozumowań

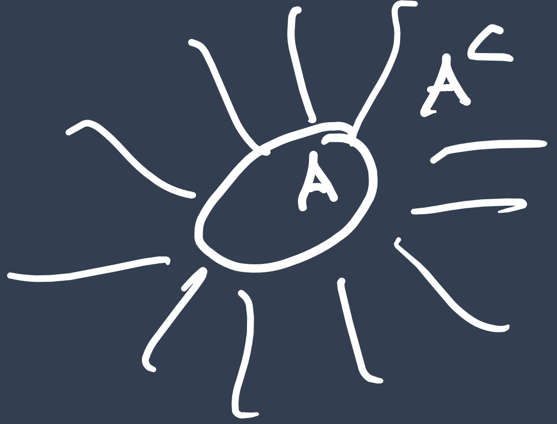
(P) $(n=4)$

wprost : 12 rozum

RR : 4 rozumo wszystkie.

Dopełnienie zbiorów.

Załóżmy że mamy ustalony zbiór Ω. Niech $A \subseteq \Omega$.

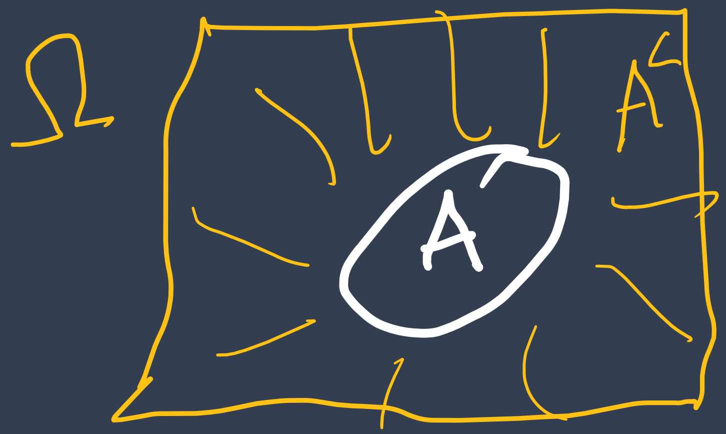


Uniwersum

Określony

$$A^c = \Omega \setminus A.$$

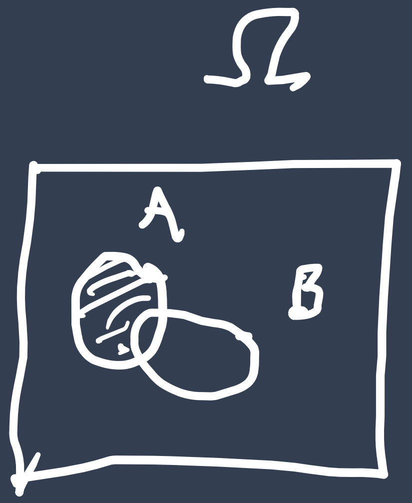
c - complement



Uwaga: notacja nie jest precyzyjna. Powinniśmy pisać A^{c_Ω}.

FAKT. Jeśli $A, B \subseteq \Omega$, to

$$\underbrace{A \setminus B}_{L} = \underbrace{A \cap B^c}_{P}.$$



D-d: $L, P \subseteq \Omega$.

Jeśli $x \notin \Omega$, to $x \notin L \wedge x \notin P$

więc $x \in L \leftrightarrow x \in P$.

Załóż. że $x \in \Omega$. wtedy

$$x \in A \setminus B \overset{def}{\equiv} x \in A \wedge x \notin B$$

$$\equiv x \in A \wedge (x \in \Omega \wedge x \notin B) \equiv x \in A \wedge x \in B^c \equiv$$

$$\equiv x \in A \cap B^c \quad \blacksquare$$

- $A \setminus B \subseteq \Omega$
- $\left.\begin{array}{l} A \subseteq \Omega \\ B^c \subseteq \Omega \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap B^c \subseteq \Omega$

Tw. Zał. że $A, B \subseteq \Omega$. Wtedy

1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

prawa de Morgana rach. zbiorów

D-d. Ustalmy $x \in \Omega$. Wtedy

$x \in (A \cup B)^c \equiv \neg(x \in A \cup B) \equiv \neg(x \in A \vee x \in B)$

$\equiv (\neg x \in A) \wedge (\neg x \in B) \equiv x \in A^c \wedge x \in B^c$

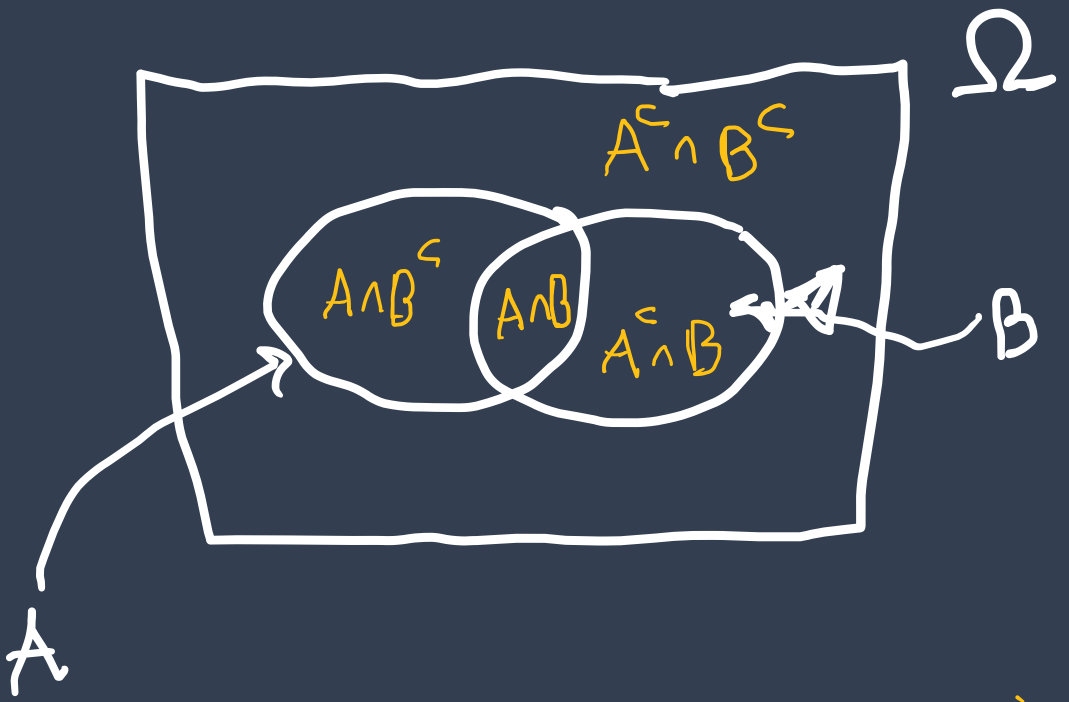
$\equiv x \in A^c \wedge B^c$

$\boxtimes$

(2) $\leftarrow$ zadanie

Składowe rodziny zbiorów.

mamy $\mathcal{C} = \{A, B\}$, $\quad A, B \subseteq \Omega$



Co możemy wydefiniować ze zbiorów A, B za pomocą $\cap, \cup, {}^c$?

[$A \setminus B = A \cap B^c$]

Składowe rodziny $\mathcal{C}$: $\quad A \cap B, \ A \cap B^c, \ A^c \cap B, \ A^c \cap B^c$.

$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \quad \left(= A \cap (B \cup B^c) = A \cap \Omega = A \right)$

$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

diagram Venna

$\mathcal{C} = \{A, B\}$

$\mathcal{S} = \{A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B, A^c \cap B^c\}$.

$= \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$

CLAIM: zbiory, które mogę wydefin. z $\mathcal{C}$ są to sumy składowych.

np. $S_1 \cup S_3 \cup S_4$, ϕ, $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ $(= \Omega)$

Uzasadnienie: Zał. że Z jest takim zbiorem.

Weźmy $x \in \Omega$. Oznaczmy $p =$ "$x \in A$", $q =$ "$x \in B$".

Rozpiszmy $x \in Z$.

$$z^* \in \mathcal{L}(\{p, q\})$$

p	q	z^*
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

$$z^* \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$$

$$Z = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

$$(= B)$$

Uogólnienie: $\mathcal{C} = \{A_1, \dots, A_n\}$

Składowe: $A_1^{\varepsilon_1} \cap A_2^{\varepsilon_2} \cap \dots \cap A_n^{\varepsilon_n}$

czyli np. $A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c$

Składowych mamy 2^n: $\varepsilon_i = \begin{cases} \text{nic} \\ \text{lub} \\ c \end{cases}$

$\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$, gdzie $m = 2^n$.

Liczba sum składowych: $2^m = 2^{(2^n)}$.