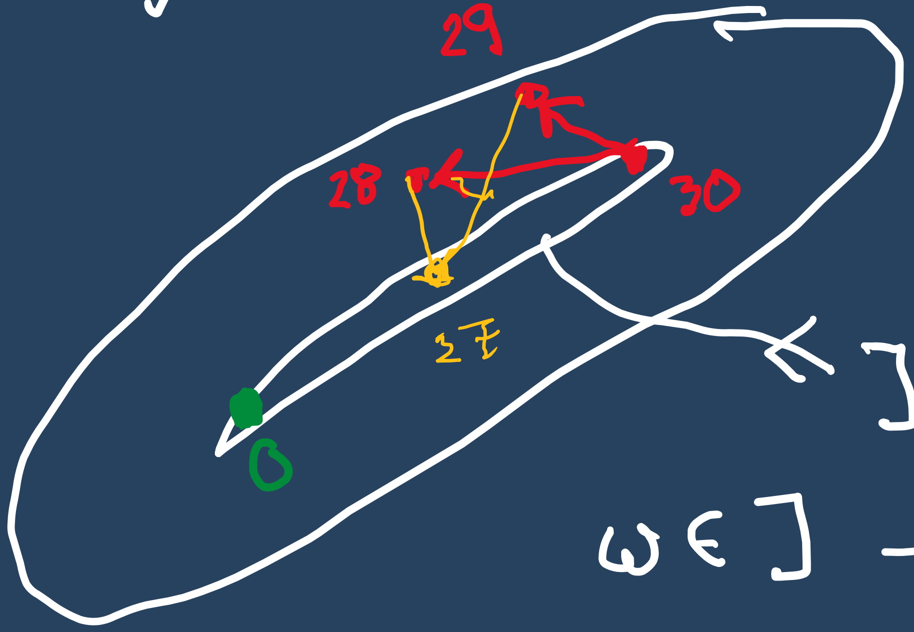
Gra w zapałki. POCZ: $n = 30$

strategia zwycięska dla $\underline{\text{II}}$ gracza: trzymaj się liczb podzielnych przez 3



$\{0, .., 30\}$

mogę wziąć 1 lub 2 zapałki

$J = \{3k : k = 0, .., 10\}$ ← jądro gry

$w \in J \rightarrow$ każdy ruch wyprowadza z jądra

$w \notin J \rightarrow$ jest ruch wprowadzający w jądro.

stan końcowy $\rightarrow 0 \in J$

abstrakcyjny model gry.

- Ω ($=\{0, \ldots, 30\}$) ← stan gry.
- gra ma skończoną długość. ($\in \mathbb{N}$)
- znany zbiór graczy
- wynik [jednoznaczny (wygrałeś I v wygr. II, nigdy razem)

po ruchu II

Przebieg gry: $\overline{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$ $k \leq N$

st. pocz. po ruchu I

$D(\overline{\omega})$ = zbiór dopuszcz. stanów po $\overline{\omega}$

np $D((30, 28, 27)) = \{26, 25\}$

• jest określony stan pocz. ω_0

$$D(\langle\rangle) = \{\omega_0\}$$

$$\varphi = (\exists \omega_1 \in D((\omega_0)))(\forall \omega_2 \in D((\omega_0, \omega_1)))(\exists \omega_3 \in D((\omega_0, \omega_1, \omega_2)))\ldots$$

$$\ldots(\exists \omega_N \in D((\omega_0, \ldots, \omega_{N-1})))\big((\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_N) \text{ jest wygrywa. dla } \underline{\mathrm{I}}\big)$$

$\varphi \equiv$ " $\underline{\mathrm{I}}$ ma str. zwyc. ".

$$\neg\varphi \equiv (\forall \omega_1 \in D((\omega_0)))(\exists \omega_2 \in D(\omega_0, \omega_1))\ldots\big((\omega_0, \ldots, \omega_N) \text{ nie jest wygr. dla } \underline{\mathrm{I}}\big)$$

$$\equiv \text{——} \;\; \text{''} \;\; \text{——} \big((\omega_0, \ldots, \omega_N) \text{ jest wygr. dla } \underline{\mathrm{II}}\big)$$

$\neg\varphi \equiv$ " $\underline{\mathrm{II}}$ ma str. zwyc. ".

Wn. ~~…~~ każda dwuosobowa gra o skończ. długości ~~…~~ jest ZDETERMINOWANA, czyli I gracz ma str. zwyc. lub II ma str. zwyc.

Działania uogólnione (wprowadzenie),

"rodzina zbiorów" ≡ zbiór którego elementami są zbiory

Def. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną zbiorów.

(1) $x \in \bigcup \mathcal{A} \longleftrightarrow (\exists X \in \mathcal{A})(x \in X)$

(2) $x \in \bigcap \mathcal{A} \longleftrightarrow (\forall X \in \mathcal{A})(x \in X)$.

(P) $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$

$$x \in \bigcup \mathcal{A} \equiv (\exists X \in \mathcal{A})(x \in X)$$

$$\equiv x \in A \vee x \in B \vee x \in C$$

$$\equiv x \in A \cup B \cup C$$

$$\bigcup \{A, B, C\} = A \cup B \cup C$$

Podobnie

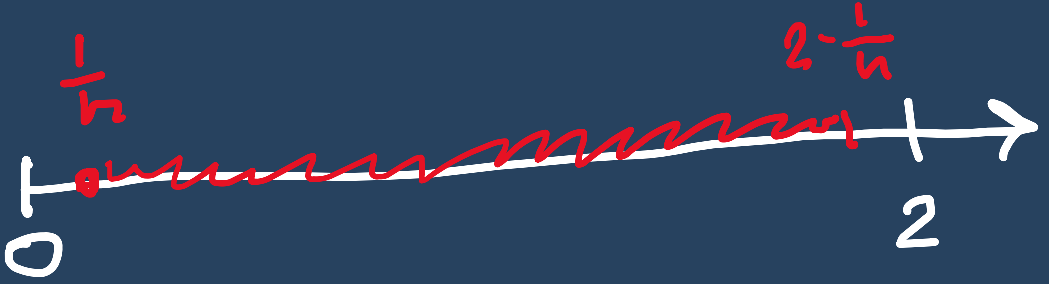
$$\bigcap \{A, B, C\} = A \cap B \cap C$$

(P) $\mathcal{A} = \{\underbrace{[\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}]}_{A_n} : n\in\mathbb{N}^+\}$

$\bigcup\mathcal{A} = ?$

$x\in\bigcup\mathcal{A} \equiv (\exists n\in\mathbb{N}^+)(x\in[\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}])$

$\equiv (\exists n\in\mathbb{N}^+)(\frac{1}{n} \le x \le 2-\frac{1}{n})$



$\lim \frac{1}{n} = 0$

$\lim (2-\frac{1}{n}) = 2$

$0 < \frac{1}{n}$; $2-\frac{1}{n} < 2$

- $\frac{1}{n} \le x \le 2-\frac{1}{n} \rightarrow 0 < x < 2$
- $x\in(0,2)$

- jest n_1 t-że $\frac{1}{n_1} < x$
- jest n_2 —"— $x < 2-\frac{1}{n_2}$
- $n = \max(n_1, n_2)$

$$\bigcup\left\{\left[\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right] : n \in \mathbb{N}^+\right\} = (0, 2)$$

(2) $$\bigcap\left\{\left[\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right] : n \in \mathbb{N}^+\right\} = \{1\}$$

UWAGA: $\bigcap \emptyset$ nie jest zbiorem

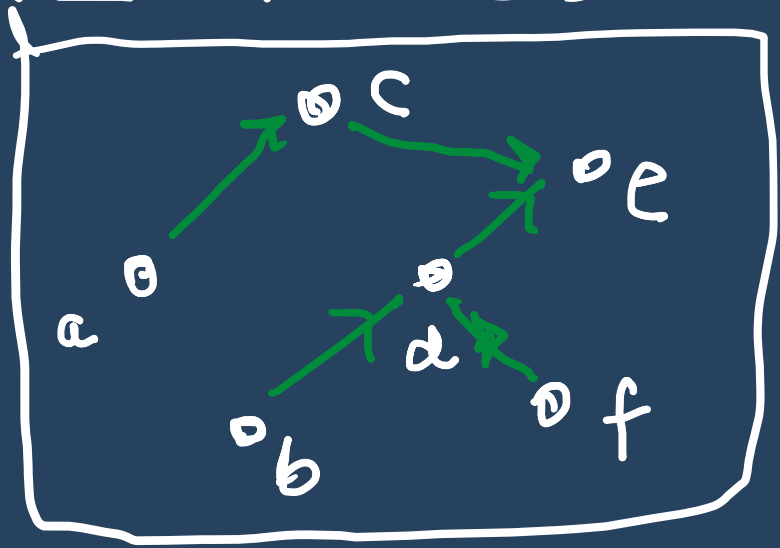
Bo $x \in \bigcap \emptyset \equiv (\forall X \in \emptyset)(x \in X)$

$$\equiv (\forall X)\underbrace{(\underbrace{X \in \emptyset}_{0} \rightarrow x \in X)}_{1} \equiv T$$

Uwaga: Jeśli $\mathcal{A} \neq \emptyset$ i $A \in \mathcal{A}$

to $\bigcap \mathcal{A} \subseteq A$.

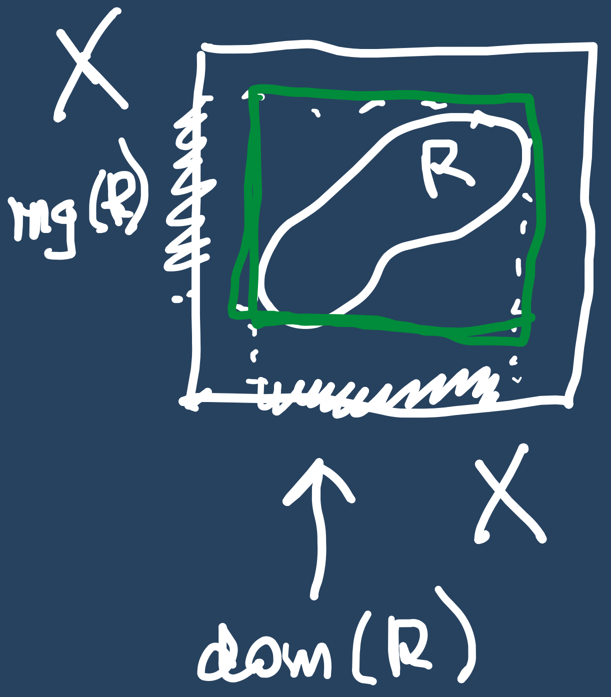
RELACJE



$$R = \{(a,c),(c,e),(d,e),(b,d),(f,d)\}$$

DEF. R nazywamy relacją jeśli istnieje zbiór X t.że

$$R \subseteq X \times X.$$



- $\mathrm{dom}(R) = \{x \in X : (\exists y)((x,y) \in R)\}$
- $\mathrm{rng}(R) = \{y \in X : (\exists x)((x,y) \in R)\}$

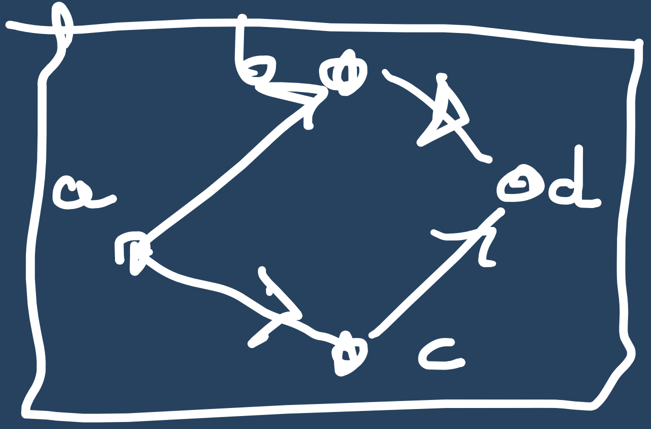
obraz

inne oznaczenie: co-dom(R)

FAKT: $R \subseteq \mathrm{dom}(R) \times \mathrm{rng}(R)$

Def. Niech R będzie relacją.
Relację <u>odwrotną</u> do R nazywamy

$$R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\}$$



R

R^{-1}

$dom(R) = \{a, b, c\}$
$rng(R) = \{b, c, d\}$
$dom(R^{-1}) = \{b, c, d\}$

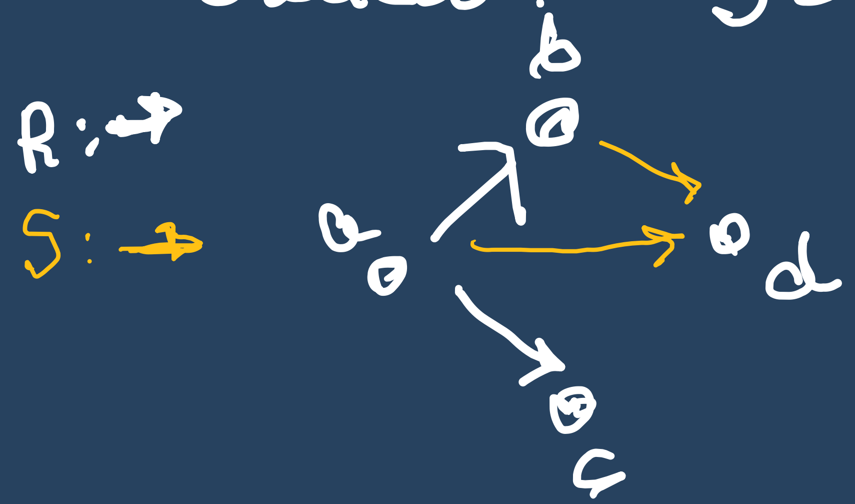
FAKT:
- $dom(R^{-1}) = rng(R)$
- $rng(R^{-1}) = dom(R)$

Z

Def. Niech R i S będą relacjami. Złożeniem relacji R i S nazywamy relację $S \circ R$ t. że

$$(x,z) \in S \circ R \equiv (\exists y)\big((x,y) \in R \land (y,z) \in S\big)$$

Uwaga: $S \circ R \overset{\text{ozn}}{\equiv} R;S$



$$S \circ R = \{(a,d)\}$$

FAKT. $\boxed{(S\circ R)^{-1} = R^{-1}\circ S^{-1}}$

D-d. $(x,z)\in(S\circ R)^{-1} \underset{def}{\equiv} (z,x)\in S\circ R$

$\overset{def}{\equiv} (\exists y)\big((z,y)\in R \wedge (y,x)\in S\big)$

$\equiv (\exists y)\big((y,z)\in R^{-1} \wedge (x,y)\in S^{-1}\big)$

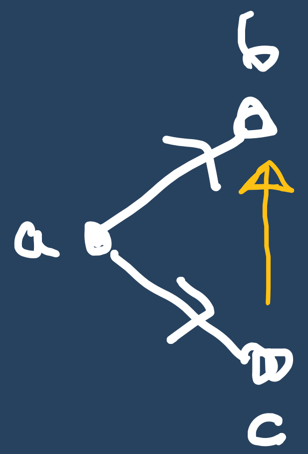
$\overset{\models}{\equiv} (\exists y)\big((x,y)\in S^{-1} \wedge (y,z)\in R^{-1}\big)$

$\equiv (x,z)\in R^{-1}\circ S^{-1}$ $\blacksquare$

UWAGA: $(G,\cdot)$ - grupa

$(a\cdot b)^{-1} = b^{-1}\cdot a^{-1}$

FAKT. Złożenie relacji nie jest przemienne.



$R = \{(a,b), (a,c)\}$

$S = \{(c,b)\}$

$R \circ S = \emptyset$

$S \circ R = \{(a,b)\}$

Tw. $\boxed{R\circ(S\circ T) = (R\circ S)\circ T}$

czyli: złożenie relacji jest łączne.

D-d.

$$(a,d)\in R\circ(S\circ T) \equiv (\exists c)((a,c)\in S\circ T \wedge (c,d)\in R)$$

$$\equiv (\exists c)(((\exists b)(a,b)\in T\wedge(b,c)\in S)\wedge(c,d)\in R)$$

$$\equiv (\exists c)((\exists b)((a,b)\in T\wedge(b,c)\in S\wedge(c,d)\in R))$$

$$\equiv (\exists c)(\exists b)((a,b)\in T\wedge(b,c)\in S\wedge(c,d)\in R)$$

$$(a,d)\in(R\circ S)\circ T \equiv (\exists b)((a,b)\in T\wedge(b,d)\in R\circ S)$$

$$\equiv (\exists b)((a,b)\in T\wedge(\exists c)((b,c)\in S\wedge(c,d)\in R))$$

$$\equiv (\exists b)(\exists c)((a,b)\in T\wedge(b,c)\in S\wedge(c,d)\in R).$$

$\blacksquare$

Def. 1) relacja R jest symetryczna, jeśli

$$(\forall x,y)\big((x,y)\in R \to (y,x)\in R\big)$$

2) R jest zwrotna na X jeśli

$$R\subseteq X\times X \wedge (\forall x\in X)\big((x,x)\in R\big)$$

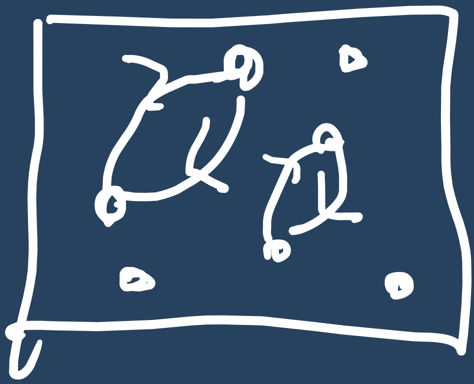
3) R jest przechodnia jeśli

$$(\forall x,y,z)\big((x,y)\in R \wedge (y,z)\in R \to (x,z)\in R\big)$$

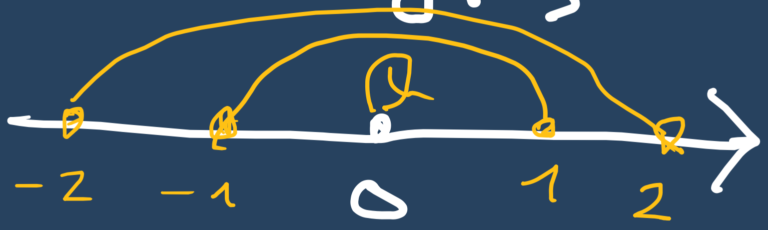
INTERPRETACJA

symetria:

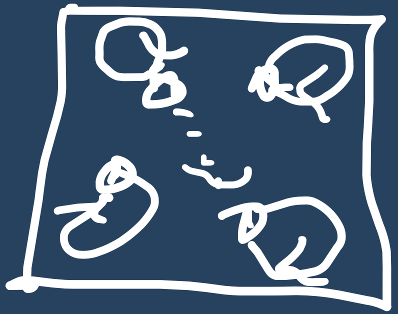
R - sym
$\iff R^{-1} \subseteq R$
$\iff R = R^{-1}$



$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$



zwrotność na X:



R - zwrotna na X

$\equiv$

$\underbrace{\{(x,x) : x \in X\}}_{id_X} \subseteq R$

$\equiv$

$id_X \subseteq R$

UWAGA:
$(R^{-1})^{-1} = R$