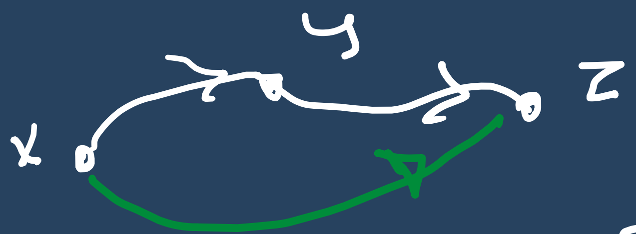
Przechodniość

$$(\forall x,y,z)\big([(x,y)\in R \wedge (y,z)\in R] \to (x,z)\in R\big)$$



wn. R jest przechodnia $\equiv$ $R\circ R \subseteq R$

(P) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (\exists a\in\mathbb{R})(y=x+a^2)\} = \leq$

$\leq$ – zwrotna i przechodnia na $\mathbb{R}$.

Def. R jest słabo-antysymetryczna, jeśli

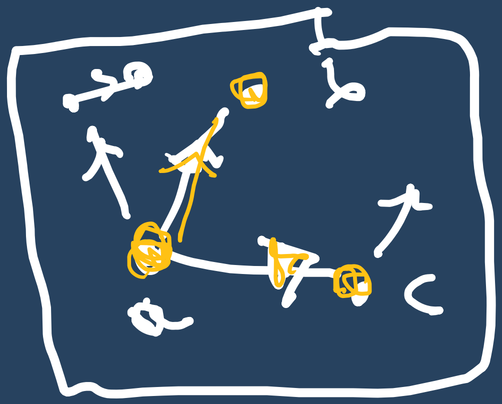
$$(\forall x,y)\Big(\big((x,y)\in R \wedge (y,x)\in R\big)\to x=y\Big)$$

(P) $\leq$ na $\mathbb{R}$: $x\leq y \wedge y\leq x \to x=y$.

DEF. Relacja R jest FUNKCJĄ, jeśli

$$(\forall x)(\forall y_1,y_2)\Big(\big((x,y_1)\in R \wedge (x,y_2)\in R\big)\to y_1=y_2\Big)$$

(P)



$b\neq c$

← R nie jest funkcją

Tw. Jeśli R jest funkcją i S jest funkcją, to $R \circ S$ jest funkcją.

D-d. Załóżmy, że $(x, z_1), (x, z_2) \in R \circ S$.

- $(x, z_1) \in R \circ S \equiv (\exists y_1)\left((x, y_1) \in S \wedge (y_1, z_1) \in R\right)$

  Jest y_1 t. że $(x, y_1) \in S \wedge (y_1, z_1) \in R$

- Jest y_2 t. że $(x, y_2) \in S \wedge (y_2, z_2) \in R$.

ALE S jest funkcją.

Zatem $y_1 = y_2$.

Zatem $(y_1, z_1) \in R$ i $(y_1, z_2) \in R$, ALE R jest funkcją,

więc $z_1 = z_2$ $\blacksquare$

WNIOSEK. Jeśli f, g, h są funkcjami, to

$$f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h.$$

Terminologia:

$(x,y)\in R \equiv xRy$ // notacja infiksowa

Ⓟ $(x,y)\in \leqslant \equiv x\leqslant y$ (na $\mathbb{R}$)

Dla funkcji: jeśli f jest funkcją:

$$y = f(x) \equiv (x,y)\in f.$$

CZYLI: $y = f(x) \equiv x\in dom(f) \wedge (x,y)\in f.$

(P) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$

$g(x) = \sin(x)$

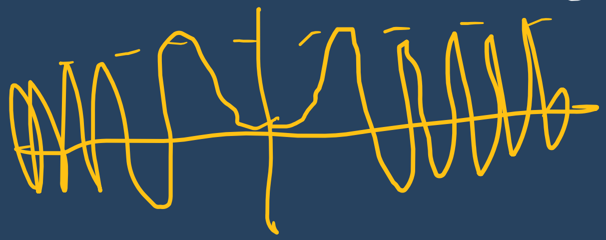
1) $h = f \circ g$ $y = h(x) = (\sin(x))^2$

$y = \sin(x)$

2) $\tilde{h} = g \circ f$: $y = \tilde{h}(x) = \sin(x^2)$

Pregletand

$f \circ g \neq g \circ f$



<u>Def</u>. Niech R będzie relacją oraz niech A będzie zbiorem. Wtedy:

1) $R[A] = \{y : (\exists a \in A)((a,y) \in R)\}$ $\left(= \vec{R}[A]\right)$

2) $R^{-1}[A] = \{x : (\exists a \in A)((x,a) \in R)\} = \left(\overleftarrow{R}[A]\right)$

Uwaga: Jeśli $R \subseteq X \times X$, to

$$R[A] = \{y \in X : (\exists a \in A)((a,y) \in R)\}$$

$$R^{-1}[A] = \{x \in X : (\exists a \in A)((x,a) \in R)\}$$

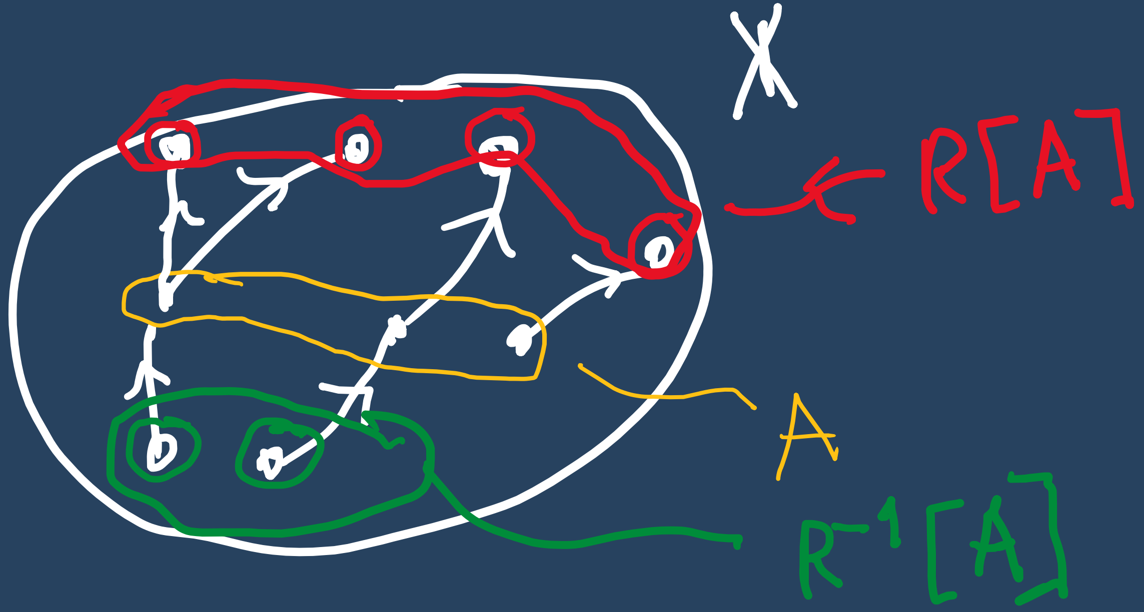
Uwaga: $\overleftarrow{R}[A] = (R^{-1})[A]$

D-d. $x \in \overleftarrow{R}[A] \equiv (\exists a \in A)((x,a) \in R) \equiv$

$\equiv (\exists a \in A)((a,x) \in R^{-1}) \equiv$

$\equiv x \in (R^{-1})[A]$.

$R[A]$



UWAGA: $R[\mathrm{dom}(R)] = \mathrm{rng}(R)$ (Z)

Tw. $R[A\cup B] = R[A] \cup R[B]$

D-d. $y \in R[A\cup B] \equiv (\exists x \in A\cup B)((x,y)\in R) \equiv$

$\equiv (\exists x)(x \in A\cup B \wedge (x,y)\in R) \equiv$

$\equiv (\exists x)((x\in A \vee x\in B) \wedge (x,y)\in R) \equiv$

$\equiv (\exists x)((x\in A \wedge (x,y)\in R) \vee (x\in B \wedge (x,y)\in R))$

$\equiv (\exists x)(x\in A \wedge (x,y)\in R) \vee (\exists x)(x\in B \wedge (x,y)\in R)$

$\equiv (\exists x\in A)((x,y)\in R) \vee (\exists x\in B)((x,y)\in R)$

$\equiv y\in R[A] \vee y\in R[B] \equiv y\in R[A]\cup R[B]$ $\blacksquare$

Tw. $\boxed{R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]}$

D-d. $y \in R[A \cap B] \equiv \ldots \equiv$

$(\exists x)(\cancel{(x,y)}(x \in A \wedge x \in B) \wedge (x,y) \in R) \equiv$

$p \equiv p \wedge p$

$(\exists x)(x \in A \wedge x \in B \wedge (x,y) \in R \wedge (x,y) \in R) \equiv$

$(\exists x)((x \in A \wedge (x,y) \in R) \wedge (x \in B \wedge (x,y) \in R)) \Rightarrow$

$(\exists x)(x \in A \wedge (x,y) \in R) \wedge (\exists x)(x \in B \wedge (x,y) \in R) \equiv$

$y \in R[A] \wedge y \in R[B] \equiv$

$y \in R[A] \cap R[B]$ ■

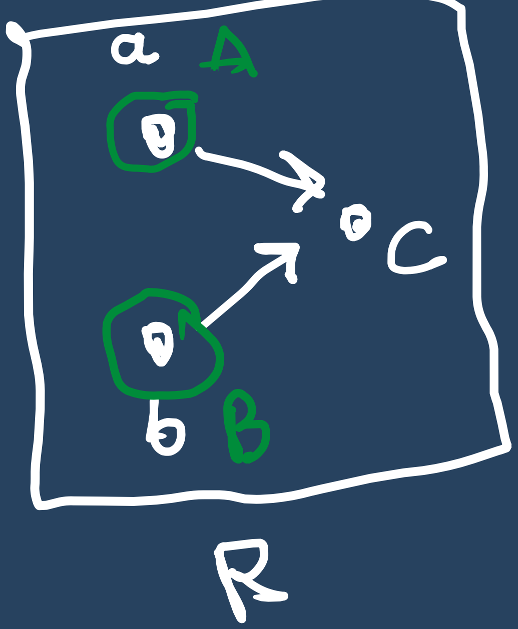
$(\exists x)\varphi(x) \wedge (\exists x)\psi(x)$

$\uparrow$

$(\exists x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$

(P)

$a \neq b.$



$A = \{a\}$

$B = \{b\}$

$R[A \cap B] = R[\phi] = \phi$

$R[A] \cap R[B] = \{c\} \cap \{c\} = \{c\} \neq \phi.$

$R[A \cap B] \not\supseteq R[A] \cap R[B].$

Tw. Niech f będzie funkcją. Wtedy

$$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B].$$

UWAGA. f jest funkcją.

$$x \in f^{-1}[C] \equiv (\exists y \in C)((x,y) \in f) \equiv$$

$$A \cap B \qquad \equiv \underline{x \in \mathrm{dom}(f)} \wedge f(x) \in C.$$

D-d. $x \in f^{-1}[A \cap B] \equiv x \in \mathrm{dom}(f) \wedge f(x) \in A \cap B$ $\quad p \equiv p \wedge p$

$$\equiv (x \in \mathrm{dom}(f) \wedge f(x) \in A) \wedge (x \in \mathrm{dom}(f) \wedge f(x) \in B) \equiv$$

$$\equiv x \in f^{-1}[A] \wedge x \in f^{-1}[B] \equiv x \in f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$$

$\boxtimes$

(P) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

```
int IdN (int x) {
  return x;
}

double IdN (int x){
  return (double) x;
}
```

$1.0 * x$

Teoria
Kategorii

języki funkcyjne (np. HASKEL)

OZNACZENIE:

$f: A \to B$

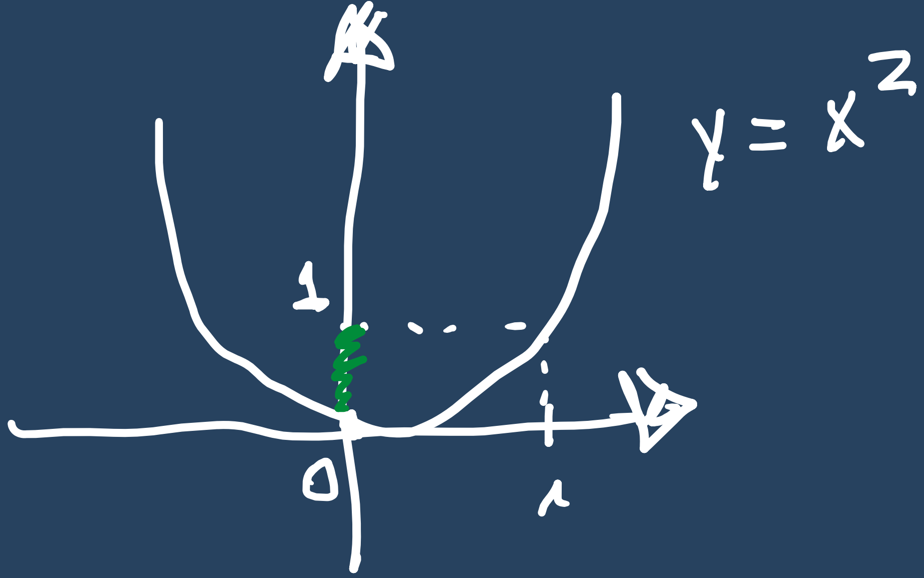
$\Leftrightarrow$

f jest funkcją $\wedge$
$dom(f) = A \wedge$
$rng(f) \subseteq B$

UWAGA: w matematyce $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$.

w informatyce:
typ: int ← podzb. $\mathbb{Z}$
double ← podz $\mathbb{R}$

(P) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$



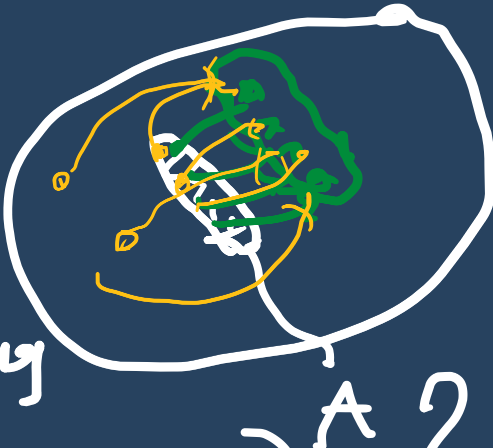
$f[[0,1]] = [0,1]$

$f^{-1}[[0,1]] = [-1,1]$

$f^{-1}[f[[0,1]]] = [-1,1] \supsetneq [0,1]$

FAKT: Jeśli $A \subseteq \mathrm{dom}(R)$ to

$$R^{-1}[R[A]] \supseteq A$$



? ZADANIE → a co byłoby, gdyby się nie zał. że $A \subseteq \mathrm{dom}(R)$?