OBRAZY ZBIORÓW.

- $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$
- $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$

FAKT. Zał. że f jest funkcją. Wtedy

$$x \in f^{-1}[A] \equiv x \in dom(f) \wedge f(x) \in A$$

D-d. $x \in f^{-1}[A] \equiv (\exists a \in A)((x,a) \in f)$

$\equiv x \in dom(f) \wedge (\exists a \in A)(f(x) = a)$

$\equiv x \in dom(f) \wedge f(x) \in A$ $\square$

$$f^{-1}[A] = \{x \in dom(f) : f(x) \in A\}$$

Wniosek: Jeśli f jest funkcją, to

$$f^{-1}[A\cap B] = f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$$

D-d. $x\in f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B] \equiv x\in f^{-1}[A] \wedge x\in f^{-1}[B]$

$$\equiv \left(\underline{x\in \mathrm{dom}(f)} \wedge f(x)\in A\right) \wedge \left(\underline{x\in \mathrm{dom}(f)} \wedge f(x)\in B\right)$$

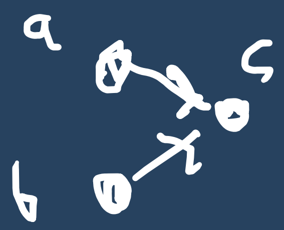
$$\equiv x\in \mathrm{dom}(f) \wedge \left(f(x)\in A \wedge f(x)\in B\right)$$

$$\equiv x\in \mathrm{dom}(f) \wedge f(x)\in A\cap B$$

$$\equiv x\in f^{-1}[A\cap B]$$ ■

Uwaga:

$a\neq b$



$f=\{(a,c),(b,c)\}$; $A=\{a\}$, $B=\{b\}$

$f[A\cap B]=\emptyset \subsetneq f[A]\cap f[B]=\{c\}$

Oznaczenie $f: X \to Y \equiv$ f jest funkcją $\wedge$
$\mathrm{dom}(f) = X \wedge$
$\mathrm{rng}(f) \subseteq Y$.

<u>Def.</u> Niech $f: X \to Y$. wtedy

1) f jest <u>injekcją</u> (f jest 1-1) jeśli

$$(\forall x_1, x_2 \in X)\,(f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2)$$

2) f jest <u>surjekcją</u> (f jest "na" Y) jeśli

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\,(y = f(x))$$

3) f jest <u>BIJEKCJĄ</u> jeśli jest injekcją i surjekcją

UWAGA. $f: X \to Y$

- f jest 1-1 $\equiv (\forall x_1, x_2)_X \left(f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2 \right)$

$$\models \left((p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p) \right)$$

$$\equiv (\forall x_1, x_2)_X \left(x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \right)$$

- f jest „na" $Y \equiv \mathrm{rng}(f) = Y$.

Tw. Załóżmy $f: X \xrightarrow{1-1} Y$ i $g: Y \xrightarrow{1-1} Z$.

Wtedy $g \circ f : X \xrightarrow{1-1} Z$.

D-d. Załóżmy $x_1, x_2 \in X$ i $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$

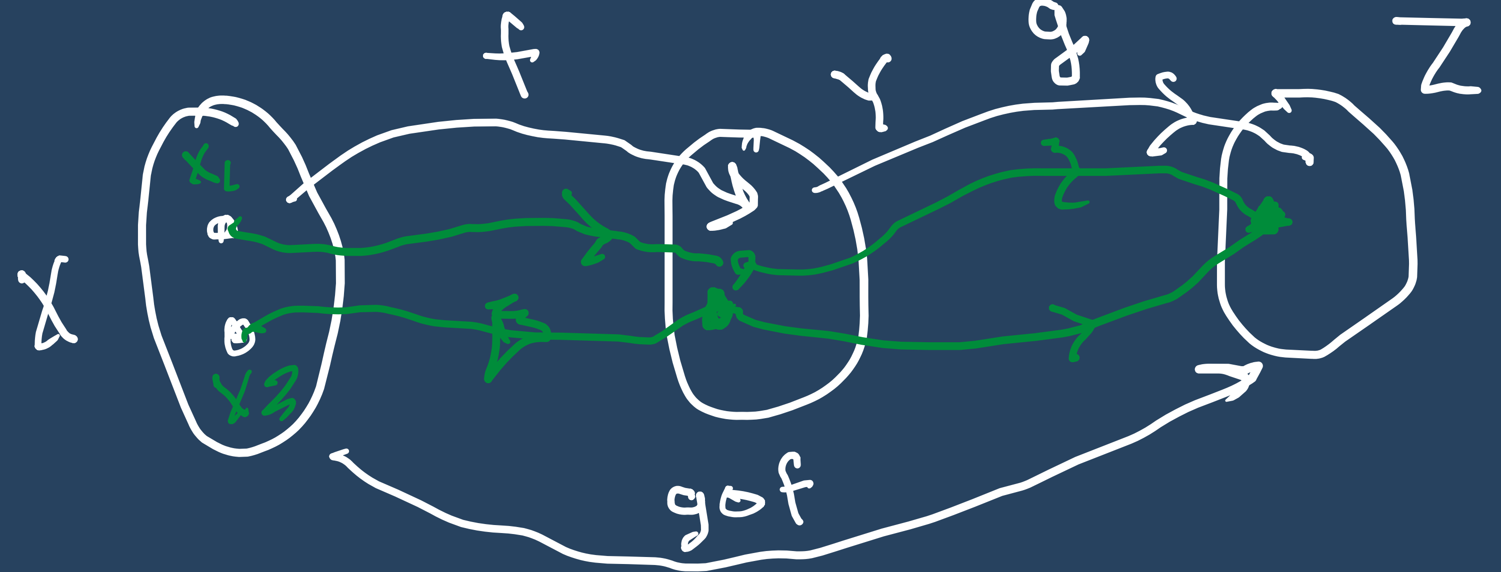
wtedy $g(\underbrace{f(x_1)}_{y_1}) = g(\underbrace{f(x_2)}_{y_2})$. Ale g jest 1-1.

więc $f(x_1) = f(x_2)$.

Ale f jest 1-1.

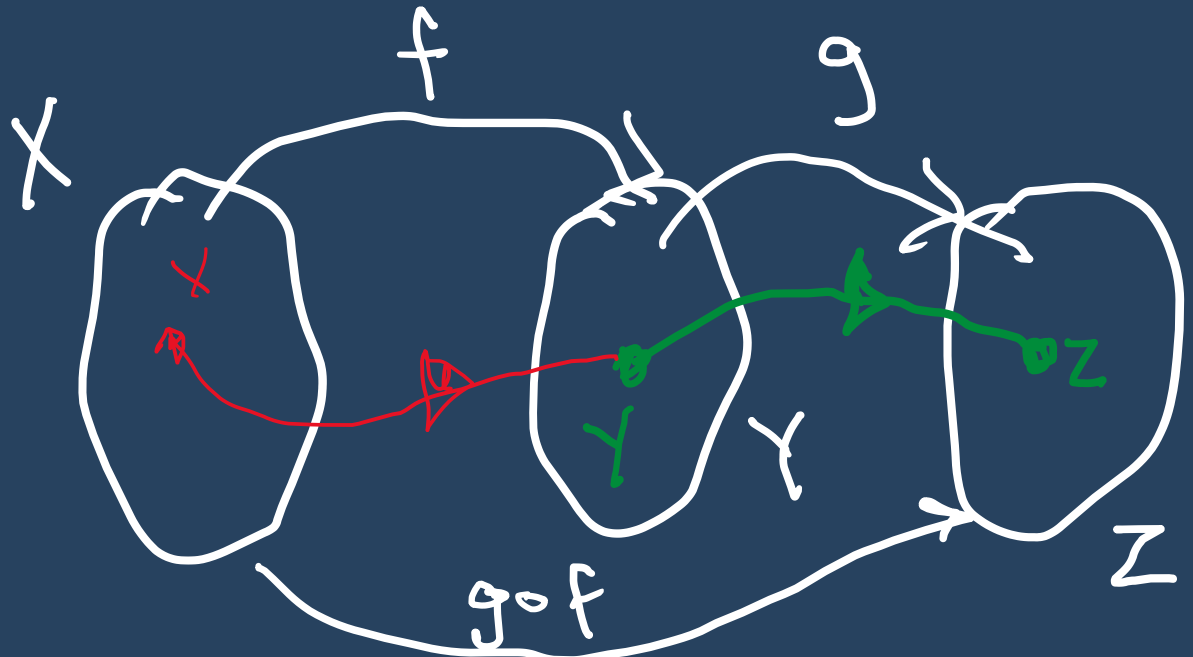
więc

$x_1 = x_2$.



Tw. Zał. że $f: X \xrightarrow{na} Y$ i $g: Y \xrightarrow{na} Z$.
Wtedy
$$g \circ f : X \xrightarrow{na} Z.$$

D-d. Weźmy $z \in Z$. Ale g jest „na" Z. Jest więc $y \in Y$ t.że $z = g(y)$
~~Za~~ Ale f jest „na" Y. Jest więc $x \in X$ t.że
$$f(x) = y.$$
Wtedy
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z \quad \blacksquare$$



<u>Wniosek</u>. Jeśli $f: X \xrightarrow[na]{1-1} Y$ i $g: Y \xrightarrow[na]{1-1} Z$, to $g \circ f: X \xrightarrow[na]{1-1} Z$.

DEF: $|X| = |Y| \equiv (\exists f)(f: X \xrightarrow[na]{1-1} Y)$

równoliczność

Interp. $|X| = |Y| \equiv X$ i Y mają tyle samo elementów

Tw. Zał. że f jest funkcją. wtedy ⟺

1) f jest 1-1

2) f^{-1} jest funkcją.

D-d. 1) → 2) Niech $f: X \xrightarrow{1-1} Y$. Niech $G = f^{-1}$.

Oczywiście $G \subseteq Y \times X$. Weźmy $y \in Y$ oraz $x_1, x_2 \in X$ t. że $(y, x_1) \in G$ i $(y, x_2) \in G$

wtedy $(x_1, y) \in f$ i $(x_2, y) \in f$, więc $f(x_1) = f(x_2)$

ale f jest 1-1, więc $x_1 = x_2$ ■

(2) → (1) (nie wprost). Jest $y \in Y$ są $x_1, x_2 \in X$ t. że $x_1 \neq x_2$

$(y, x_1) \in f^{-1}$; $(y, x_2) \in f^{-1}$; wtedy $(x_1, y) \in f$ i $(x_2, y) \in f$.

Wniosek: 1) $|X| = |X|$ zwrotność

2) $|X| = |Y| \to |Y| = |X|$ symetria

3) $|X| = |Y| \wedge |Y| = |Z| \to |X| = |Z|$ przechodn.

D-d. (1) $Id_X = \{(x,x) : x \in X\}$; $Id_X : X \xrightarrow[na]{1-1} X$ ☒

(2) Zał. że $f : X \xrightarrow[na]{1-1} Y$. Wtedy $f^{-1} : Y \xrightarrow[na]{1-1} X$

[$y \in Y$; znajd. $x \in X$ t. że $f(x) = y$, czyli $x = f^{-1}(y)$].

[Biorę $x \in X$. Oznaczamy $y = f(x)$ wtedy $x = f^{-1}(y)$]

(3) OK.

Oznaczenie. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to

$$|X| = n \equiv |X| = |\{1, \dots, n\}|$$

$$[(|X| = 0) \equiv (X = \emptyset)]$$

Terminologia: (czasem)

$$|X| = |Y| \equiv X \sim Y \equiv \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}.$$

Rodziny indeksowane zbiorów

Def. Rodzina indeksowana zb $\equiv$
funkcja F o wartościach
będących zbiorami.
$\mathrm{dom}(F) \leftarrow$ zbiór indeksów.

Oznaczenia:
$A \leftarrow$ rodz. indeks. ; $I = \mathrm{dom}(A)$.
$i \in I$; $A_i = A(i)$.

$$A = (A_i)_{i \in I}$$

P $I = \mathbb{N}$; $A(n) = [n, n+1)$

$$A : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

$$A = ([n, n+1))_{n \in \mathbb{N}}.$$

<u>Def</u>. Niech $(A_i)_{i \in I}$ będzie rodziną indeksowaną.

(1) $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \equiv (\exists i)_I (x \in A_i)$

(2) $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \equiv (\forall i)_I (x \in A_i).$

Uwaga: $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota = \bigcup \{A_\iota : \iota \in I\}$

$\bigcap_{\iota \in I} A_\iota = \bigcap \{A_\iota : \iota \in I\}$

Tw. Zał. że $(\forall \iota \in I)(A_\iota \subseteq \Omega)$. Wtedy

1) $\left(\bigcup_{\iota \in I} A_\iota\right)^c = \bigcap_{\iota \in I} (A_\iota^c)$

2) $\left(\bigcap_{\iota \in I} A_\iota\right)^c = \bigcup_{\iota \in I} (A_\iota^c)$

prawa de Morgana dla działań uogólnionych

D-d (1) $A_i \subseteq \Omega$ dla $i \in I$. Niech $\omega \in \Omega$.

$$\omega \in \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^c \equiv \neg\Big(\omega \in \bigcup_{i\in I} A_i\Big) \equiv$$

$$\equiv \neg\big((\exists i \in I)(\omega \in A_i)\big) \underset{\text{de Morgan}}{\equiv} (\forall i \in I)(\neg\, \omega \in A_i)$$

$$\equiv (\forall i \in I)(\omega \in A_i^c) \equiv \omega \in \bigcap_{i\in I} A_i^c.$$

(2) zadanie.

P • $\bigcup_{i\in I}(A_i \cup B_i) = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$

• $\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$

D-d. $x \in \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) \equiv (\exists i \in I)(x \in A_i \wedge x \in B_i)$

$\Rightarrow (\exists i \in I)(x \in A_i) \wedge (\exists i \in I)(x \in B_i) \equiv$

$\equiv x \in \bigcup_{i\in I} A_i \wedge x \in \bigcup_{i\in I} B_i \equiv x \in P$ ∎

$\vDash (\exists i)(\varphi(i) \wedge \psi(i)) \to ((\exists i)\varphi(i) \wedge (\exists i)\psi(i))$

PP $I = \{1, 2\}$

$A_1 = [1, 2]$ $B_1 = [3, 4]$

$A_2 = [3, 4]$ $B_2 = [1, 2]$

$$\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i) = (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) = \phi \cup \phi = \phi$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i \cap \bigcup_{i \in I} B_i = (A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2) =$$

$$[1, 2] \cup [3, 4].$$

Rodziny zbiorów indeksowane $\mathbb{N}$.

$\mathcal{A} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} A_m = \liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n$
- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m = \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

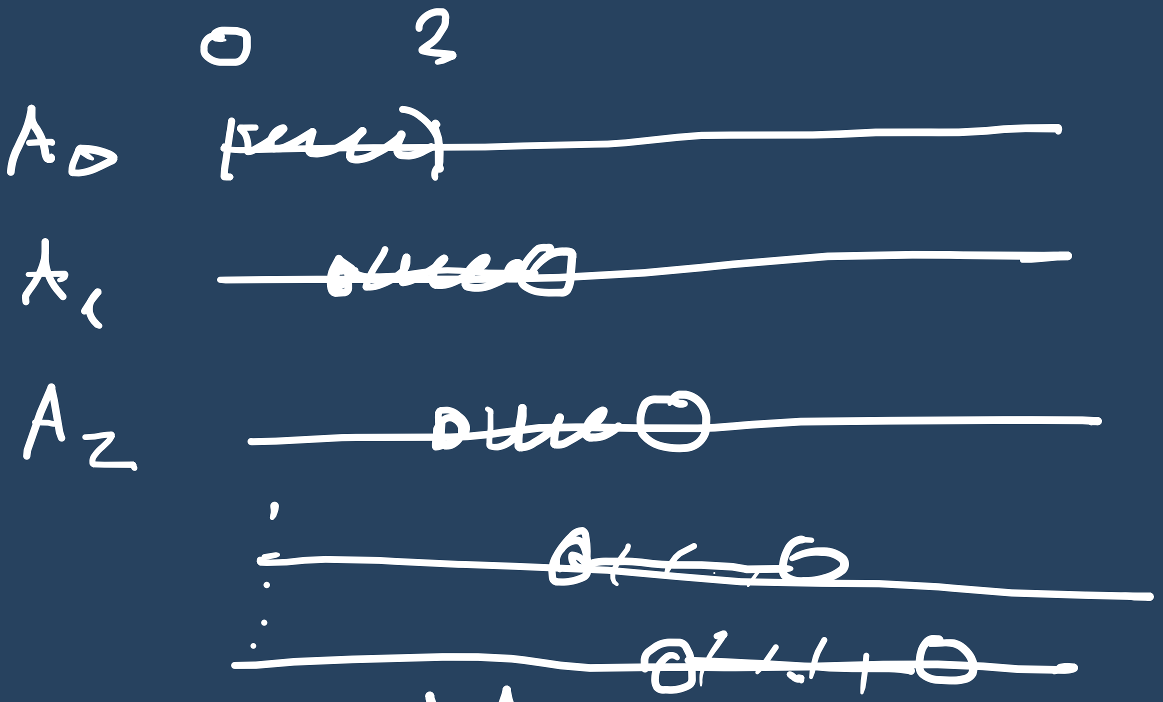
$$\boxed{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.}$$

P

$$A_n = [n, n+2)$$

$$\bigcap_n \underbrace{\bigcup_{m \geq n} A_m}_{C_n} = (*)$$

$$C_n = [n, +\infty)$$



$$(*) = \bigcap_n C_n =$$

$$= \bigcap_n [n, \infty) = \phi.$$

$$C_n = \bigcup_{m \geq n} A_m$$