RELACJE RÓWNOWAŻNOŚCI

<u>Def</u>. Relacja $R \subseteq X \times X$ jest relacją równoważności na X jeśli

(1) R jest zwrotna na X

(2) R jest symetryczna

(3) R jest przechodnia

Przykład. $X = \mathbb{Z}$; ustalamy $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$$x \approx y \overset{\text{def}}{\equiv} n \mid (x-y)$$

$$\equiv (\exists k \in \mathbb{Z})(x-y = k \cdot n)$$

- $\approx$ jest zwrotna na $\mathbb{Z}$

  mamy $x \in \mathbb{Z}$.

  $x \approx x \equiv n \mid (x - \cancel{x}) = n \mid 0 \ (\equiv (\exists k \in \mathbb{Z})\, 0 = k \cdot n)$ 0

  $\equiv T$

- Zał. że $x \approx y$.

  Jest $k \in \mathbb{Z}$ t. że $x - y = k \cdot n$. wtedy

  $$y - x = (-1) \cdot k \cdot n = \underbrace{(-k)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot n$$

  Zatem $y \approx x$.

- Zał. że $x \approx y$ i $y \approx z$.

  weźmy $k, l \in \mathbb{Z}$ t. że

$$x - y = k \cdot n$$
$$y - z = l \cdot n$$

wtedy

$$x - z = (x-y) + (y-z) = k \cdot n + l \cdot n = \underbrace{(k+l)}_{\mathbb{Z}} \cdot n.$$

Przykład. Załóżmy $f: X \longrightarrow Y$.

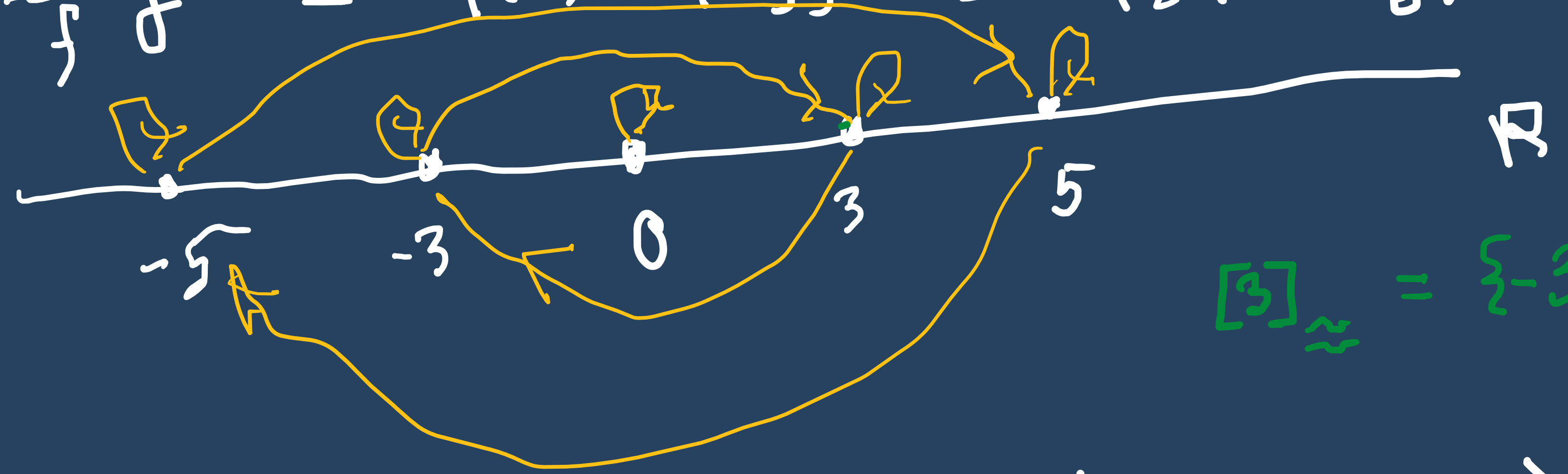
niech $(x \approx_f y) \equiv (f(x) = f(y))$

- $(x \approx_f x) \equiv (f(x) = f(x)) \equiv T$
- $(x \approx_f y) \equiv (f(x) = f(y)) \Rightarrow (f(y) = f(x)) \equiv (y \approx x)$
- $(x \approx_f y) \wedge (y \approx_f z) \equiv (f(x) = f(y)) \wedge (f(y) = f(z)) \Rightarrow (f(x) = f(z))$

$$\equiv x \approx z.$$

PP. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = |x|$

$$x \approx_f y \equiv f(x) = f(y) \equiv |x| = |y|$$



$[3]_\approx = \{-3, 3\}$

Def Niech $\approx$ będzie rel. równ. na X. Niech $a \in X$. Wtedy

$$[a]_\approx = \{x \in X : a \approx x\}.$$

(klasa abstrakcji elem. a względem rel. $\approx$)

F1. $\boxed{a \in [a]_{\approx}}$ (~~symetryczność~~ zwrotność)

$[a]_{\approx} = \{x \in X : a \approx x\}$

$x \in [a]_{\approx} \equiv a \approx x$

F2. $\boxed{a \approx b \to [a]_{\approx} = [b]_{\approx}}$

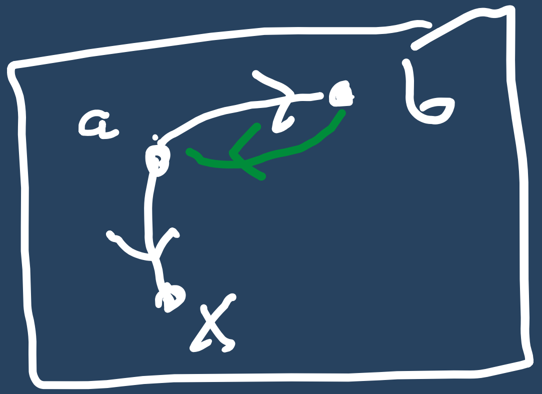
D-d. Zał. że $a \approx b$. Zał. że $x \in [a]_{\approx}$.

Czyli $a \approx x$. Wtedy $b \approx a$.

CZYLI

$$b \approx a \land a \approx x$$

z przechodn. mamy $b \approx x$



zatem $x \in [b]_{\approx}$.

Pok. że $[a]_{\approx} \subseteq [b]_{\approx}$.

Z sym. $[b]_{\approx} \subseteq [a]_{\approx}$. Zatem $[a]_{\approx} = [b]_{\approx}$.

F3. $\left([a]_{\approx} \cap [b]_{\approx} \neq \emptyset\right) \rightarrow (a \approx b)$

wniosek: $[a]_{\approx} \cap [b]_{\approx} \neq \emptyset \longrightarrow [a]_{\approx} = [b]_{\approx}$.

<u>D-d</u>. niech $x \in [a]_{\approx} \cap [b]_{\approx}$. wtedy

$(a \approx x) \wedge (b \approx x)$

wtedy (z symetrii $\approx$)

$(a \approx x) \wedge (x \approx b)$

więc z przechodn. otrzymujemy, że

$a \approx b$ ☒

(P) $X = \mathbb{Z}$; $n = 5$ $\qquad x \sim y \equiv 5 \mid (x-y)$.

$$[0]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \sim x\} = \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid (0-x)\}$$
$$= \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid (-x)\} = \{5k : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$x \in [1]_\sim \equiv 1 \sim x \equiv x \sim 1 \equiv 5 \mid (x-1)$$
$$\equiv (\exists k \in \mathbb{Z})(x - 1 = 5 \cdot k) \equiv$$
$$\equiv (\exists k \in \mathbb{Z})(x = 5k + 1)$$

$$[1]_\sim = \{5k+1 : k \in \mathbb{Z}\}$$

$5k+5 =$
$= 5(k+1)$

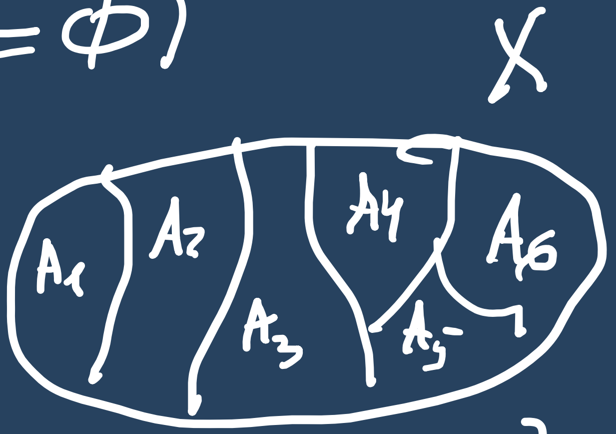
$\vdots$

$$[4]_\sim = \{5k+4 : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$[5]_\sim = [0]_\sim$$

Def. Rozbiciem (partycją) zbioru X nazywamy rodzinę $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ t. że

1) $(\forall A \in \mathcal{A})(A \neq \emptyset)$
2) $(\forall A, B \in \mathcal{A})(A \neq B \to A \cap B = \emptyset)$
3) $\bigcup \mathcal{A} = X$.



$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_6\}$

Def. Niech $\sim$ będzie rel. równow. na X. Przestrzenią ilorazową rel. $\sim$ nazywamy zbiór

$$X/\sim \; = \{[a]_\sim : a \in X\}.$$

FAKT. Jeśli $\sim$ jest rel. równoważn. na X, to $X/\sim$ jest rozbiciem zbioru X.

D-d. $X/\sim = \{[a]_\sim : a \in X\} =: \mathcal{A}$.

1) $A \in \mathcal{A} \rightarrow A = [a]_\sim$ dla jakiegoś $a \in X$

$\rightarrow A \neq \emptyset$ (bo $a \in [a]_\sim$)

2) $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$; są $a, b \in X$ t.że $A = [a]_\sim$ i $B = [b]_\sim$. Gdyby $A \cap B \neq \emptyset$, to $[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset$ więc $[a]_\sim = [b]_\sim$, więc $A = B$. ZATEM

$A \cap B = \emptyset$.

3) Chcemy pok. że $\bigcup \mathcal{A} = X$.

- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A = [a]_\sim$ dla pewnego $a \in X$

  $\Rightarrow A \subseteq X$

  zatem $\bigcup \mathcal{A} \subseteq X$

- Weźmy $a \in X$. wtedy $[a]_\sim \in \mathcal{A}$

  i $a \in A \in \mathcal{A}$, gdzie $A = [a]_\sim$

  czyli: $(\forall a \in X)(\exists A \in \mathcal{A})(a \in A)$

  czyli $X \subseteq \bigcup \mathcal{A}$.

$\blacksquare$

(P) $X=\mathbb{Z}$; $x \sim_5 y \equiv 5 \mid (x-y)$

$X/\sim_5 = \{[0]_{\sim_5}, [1]_{\sim}, \ldots, [4]\}$.

REL. RÓWN $\rightsquigarrow$ rozbicie.

$\mathcal{A}$ – rozbicie X; na X definiujemy

~~aczu~~ $x \sim y \equiv (\exists A \in \mathcal{A})(\{x,y\} \subseteq A)$.

- $\sim$-zwrotna: $a \in X$; wiemy, że $\bigcup \mathcal{A} = X$
  jest $A \in \mathcal{A}$ t. że $a \in A$. wtedy $\{a,a\} \subseteq A$
  więc $a \sim a$.

- $a \sim b \Rightarrow$ jest $A \in \mathcal{A}$ t.że $\{a, b\} \subseteq A$

  $\Rightarrow$ — " — $\{b, a\} \subseteq A$

  $\Rightarrow b \sim a$

- $\left.\begin{array}{l} a \sim b \\ b \sim c \end{array}\right] \Rightarrow$ mamy $A, B \in \mathcal{A}$ t.że $\{a, \underline{b}\} \subseteq A \wedge \{\underline{b}, c\} \subseteq B$.

  ale wtedy $b \in A \cap B$, więc $A \cap B \neq \emptyset$

  więc $A = B$, więc $\{a, b\} \subseteq A$ i $\{b, c\} \subseteq A$

  więc $\{a, c\} \subseteq A$; więc $a \sim c$

  $\square$

REL. RÓWN $\longleftrightarrow$ rozbicie

Ustalmy $\sim$ rel. równ. na X.
Niech $\varphi : X \longrightarrow X/\sim$ będzie określona wzorem

$$\varphi(x) = [x]_\sim .$$

Niech $x \approx y \equiv \varphi(x) = \varphi(y)$

$$(\equiv [x]_\sim = [y]_\sim).$$

Wiemy, że $\approx$ jest relacją równoważ.

$$x \approx y \equiv [x]_\sim = [y]_\sim \equiv x \sim y .$$

REL RÓWNOWAŻNOŚCI na X

$\parallel\!\mid$

ROZBICIA X

$\parallel\!\mid$

rel. postaci $\sim_f$ dla $f : X \to Y$.

P $X = \mathbb{R}^2$; $f((x,y)) = \sqrt{x^2+y^2}$.

$(x,y) \sim_f (x',y') \equiv \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x'^2+y'^2}$

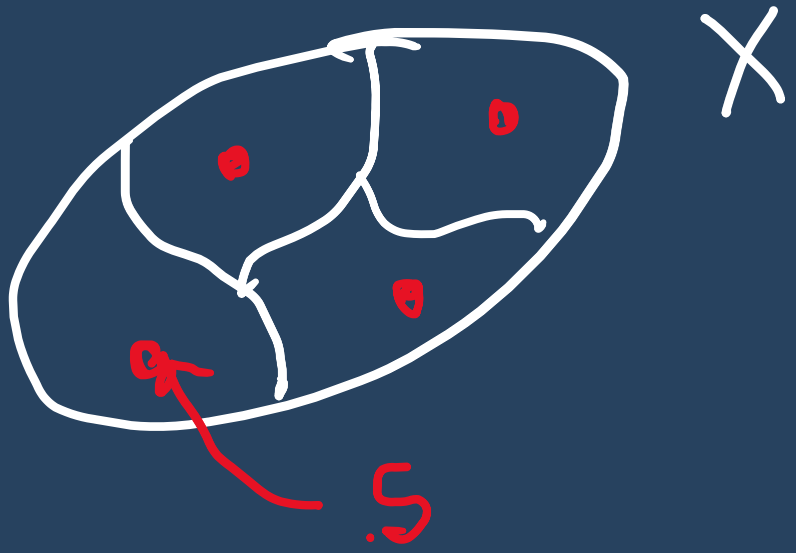
$\equiv$ odl (x,y) od $(0,0)$ = odl. punktu (x',y') od $(0,0)$

$[(1,0)]_\sim = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$

$\mathbb{R}^2/_\sim \equiv$ rozbicie $\mathbb{R}^2$ na okręgi o środku w punkcie $(0,0)$.

$[(0,0)]_\sim = \{(0,0)\}$ ← zdeg. okrąg.

Def. Niech $\mathcal{A}$ będzie rozbiciem zbioru X. SELEKTOREM $\mathcal{A}$ nazywamy dowolny zbiór $S \subseteq X$ t. że $(\forall A \in \mathcal{A})(|A \cap S| = 1)$



(P) $\mathbb{Z}$; $x \sim y \equiv n \mid (x-y)$

n - ustalone

weźmy $x \in \mathbb{Z}$.

$x = n \cdot k + r \qquad 0 \leq r < n$

$$\begin{cases} r = x \,\%\, n \\ k = x / n \end{cases} \qquad (C)$$

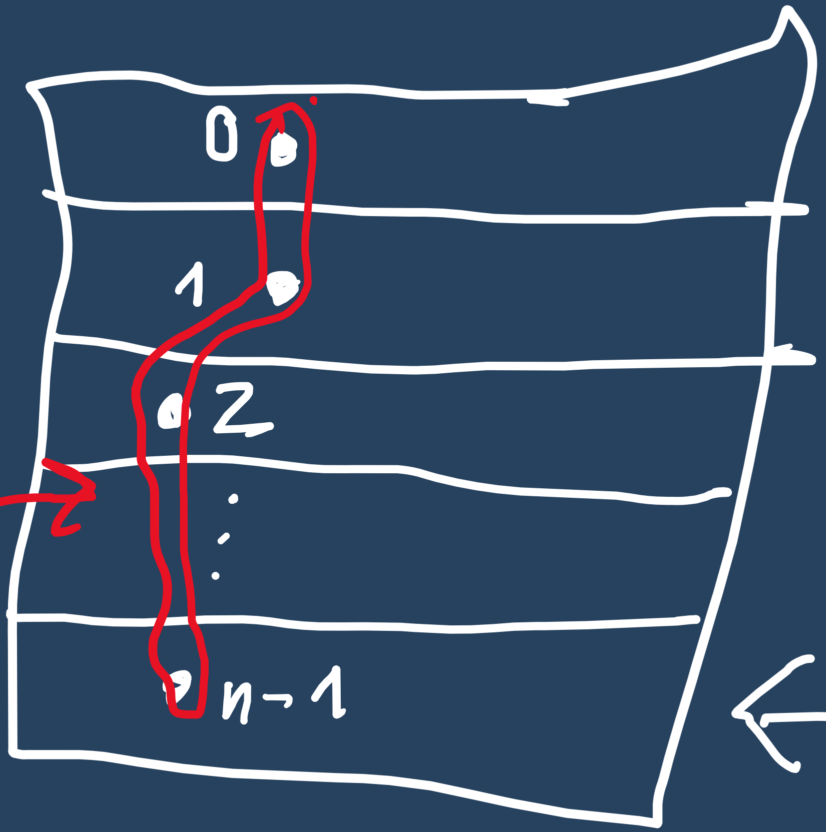
$x - r = n \cdot k \; ; \quad x \sim r$

$$\mathbb{Z}/\sim \; = \{ [r] : r = 0, 1, .., n-1 \}$$

$\mathbb{Z}$

selektor

$\mathbb{Z}/\sim$



$\{nk : k \in \mathbb{Z}\}$

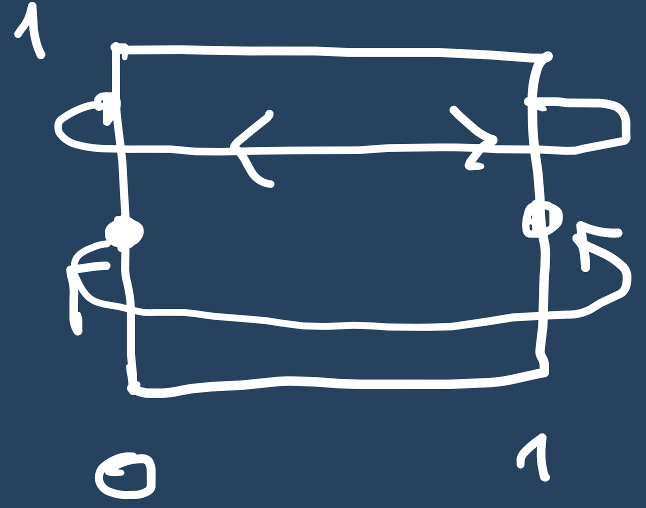
$\{nk+1 : k \in \mathbb{Z}\}$

$\{n \cdot k + (n-1) : k \in \mathbb{Z}\}$

$x \sim y \Leftrightarrow n \mid (x-y)$

$\mathbb{Z}/\sim \; = \{[r] : r \in \{0, \dots, n-1\}\}$

P



$$\varphi((x,y)) = (x \bmod 1,\ y)$$

$$x \bmod 1 = \mathrm{fr}(x)$$

$$0 \le x < 1 \to \mathrm{fr}(x) = x$$

$$\mathrm{fr}(1) = 0$$

$$\mathrm{fr}(x) = x - \lfloor x \rfloor$$

$$\varphi((1,y)) = (0,y)$$

$$\varphi((0,y)) = (0,y)$$