UWAGA O LINIOWYCH PORZĄDKACH

FAKT: Jeśli $(X, \leq)$ jest lin. porz. i $a \in X$ jest minimalny, to a jest najmniejszy.

D-d. a jest minimalny $\equiv (\forall x \in X)(x \leq a \rightarrow x = a)$

Weźmy dowolny $x \in X$. Wtedy

$$x \leq a \vee a \leq x.$$

1) jeśli $x \leq a$, to $a \leq x$
2) jeśli $a \leq x$, to $a \leq x$

W obu przyp. mamy $a \leq x$ $\boxtimes$

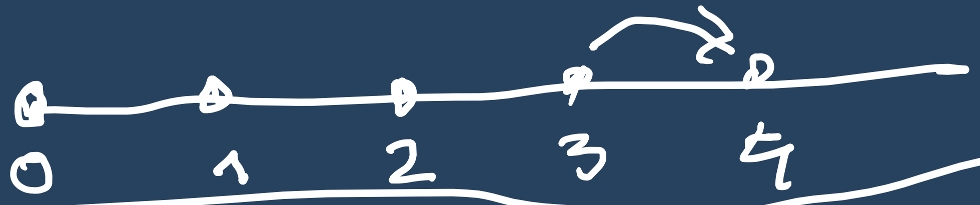
FAKT: $(X, \leq)$ jest lin. porz. $\Rightarrow (X, \leq^{-1})$ jest lin. porz.

WŁASNOŚCI LICZB NATURALNYCH

1) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ jest <u>dobrym porządkiem</u>

2) 0 jest najm. liczbą naturalną

3) $(\forall n \in \mathbb{N})(n > 0 \to (\exists k \in \mathbb{N})(n = k+1))$



DEF: $(L, \leq)$ jest dobrym porządkiem, jeśli jest liniowym porządkiem

$$(\forall A \subseteq \mathbb{L})(A \neq \emptyset \to (\exists a \in A)(\forall x \in A)(a \leq x))$$

Tw. Jeśli $A \subseteq \mathbb{N}$, $a \in A$ oraz

$(\forall x \in A)(x+1 \in A)$ // A jest induktywny

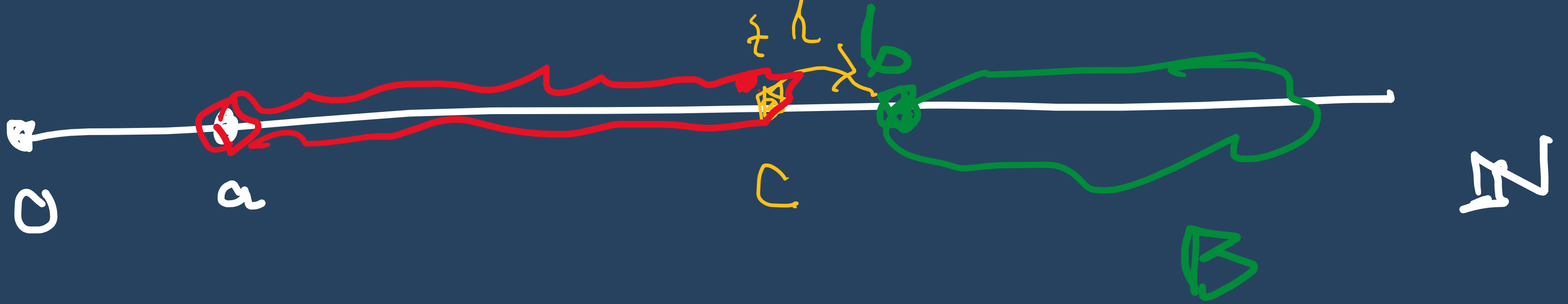
wtedy $(\forall x \geq a)(x \in A)$.

D-d. Zał. że to nie jest prawdą. Jest $x_0 \geq a$ t.że $x_0 \notin A$. Niech

$\mathbb{N} \supseteq B = \{x \geq a : x \in \mathbb{N} \wedge x \notin A\}$ $\quad B \neq \emptyset$

- $x_0 \in B$
- $B \neq \emptyset$

- niech b będzie $\leq$-najm. elem. B



- $b \in B$, więc $b \notin A$, więc $b \neq a$ (bo $a \in A$)
- niech $c \in \mathbb{N}$ t.że $b = c+1$.

wtedy
- ▶ $c \notin B$ (bo $c < b$, b – najm. w B)
- ▶ $c \geq a$
- ▶ $c \in A$

zatem $c+1 \in A$, bo A jest indukt.

więc $b \in A$. sprzeczność $\blacksquare$

PRZYKŁAD $(\mathbb{N}, \leq)$ – l. porz.

- $X = \mathbb{N} \times \{0\}$ $\quad (x,0) \leq_1 (y,0) \equiv x \leq y$
- $Y = \mathbb{N} \times \{1\}$ $\quad (x,1) \leq_2 (y,1) \equiv x \leq y$

- Oczywiście: $(X, \leq_1) \underset{\text{izo}}{\cong} (\mathbb{N}, \leq)$

$\varphi(x) = (x, 0)$

- $X \cap Y = \emptyset$.

$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ $\quad$ $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$(X, \leq_1)$ $\qquad\qquad$ $(Y, \leq_2)$

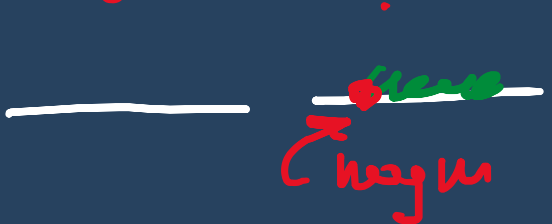
$$Z = X \cup Y$$

$$\preccurlyeq \; = \; \preccurlyeq_1 \cup \preccurlyeq_2 \cup (X \times Y)$$

- $(Z, \preccurlyeq)$ liniowy porządek
- $(Z, \preccurlyeq)$ dobry porządek $\quad B \subseteq X \cup Y$, $B \neq \emptyset$

1) 

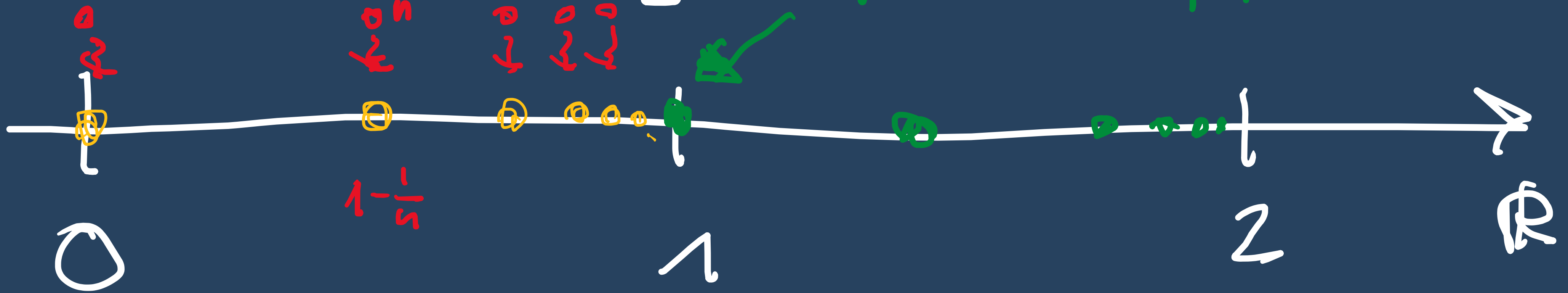
$B \cap X \neq \emptyset$

2) $B \cap X \neq \emptyset$ 

$\blacksquare$

Konkretna realizacja

to nie ma poprzednika



$$\tilde{Z} = \left\{1-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^{+}\right\} \cup \left\{2-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^{+}\right\}$$

$$\left(\tilde{Z} \cap [0,1), \leqslant\right) \underset{\text{IZO}}{\simeq} (\mathbb{N}, \leqslant)$$

$$\left(\tilde{Z} \cap [1,2), \leqslant\right) \underset{\text{IZO}}{\simeq} (\mathbb{N}, \leqslant)$$

$\boxed{\begin{array}{l} A = \tilde{Z} \cap [0,1) \\ \bullet\ 0 \in A \\ \bullet\ 1-\frac{1}{n} \in A \rightarrow 1-\frac{1}{n+1} \in A \\ A \text{ indukt.} \\ \text{ALE } A \neq \tilde{Z}. \end{array}}$

- A – zamkn. na następnik
- $0 \in A$
- $A \neq \mathbb{Z}$.

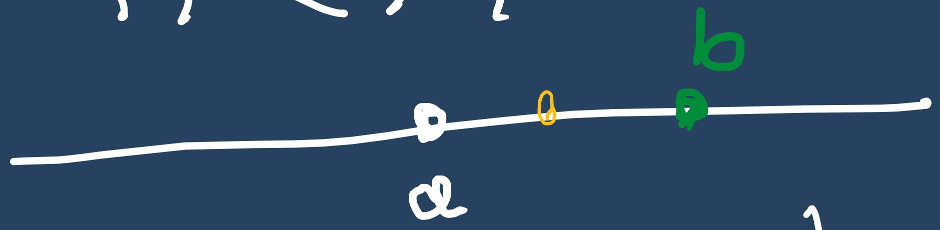
Def. $(L, \leq)$ – liniowy porządek, $a \in L$, $b \in L$

b jest następnikiem a, jeśli

1) $a < b$ $\quad (a \leq b \wedge a \neq b)$
2) $(\forall x \in L)(a < x \rightarrow b \leq x)$.

[wtedy: a jest poprzednikiem b]

(P) $(\mathbb{Q}, \leqslant)$, $a \in \mathbb{Q}$

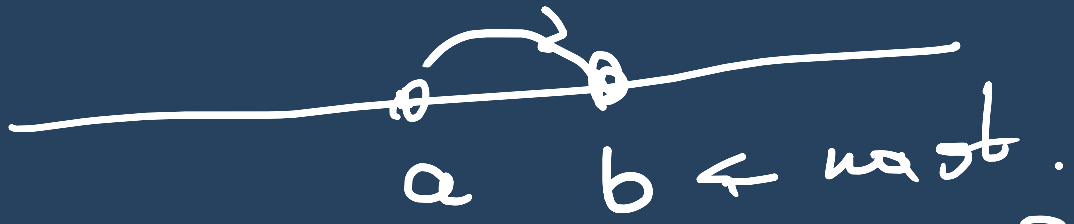


a nie ma następników

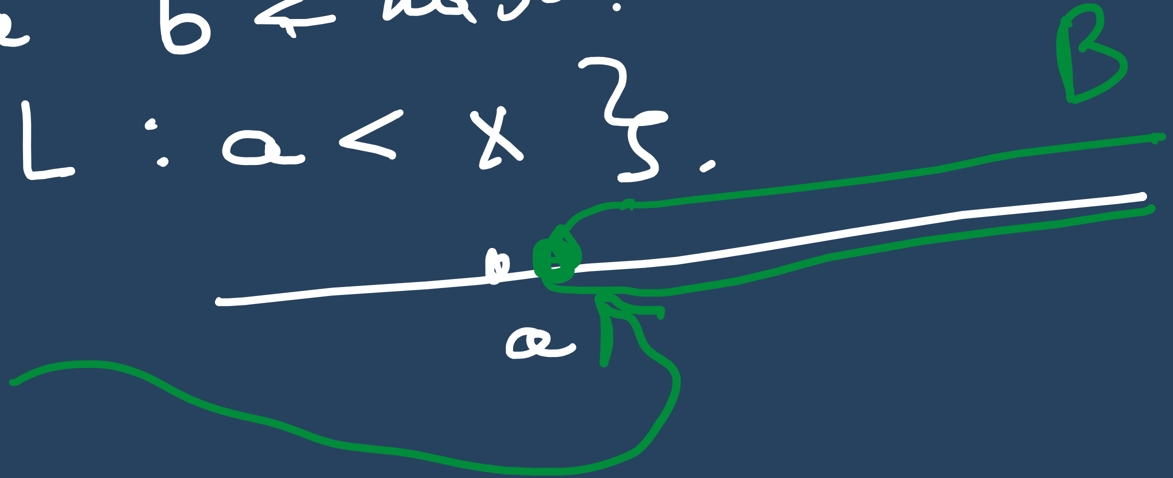
BO: jeśli $b > a$

to $a < \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\in \mathbb{Q}} < b$

Tw. Zał. że $(L, \leq)$ jest dobrym porządkiem, $a \in L$ i a nie jest największy. Wtedy a ma NASTĘPNIK.



D-d. $B = \{x \in L : a < x\}$.



Wtedy $B \neq \emptyset$.

Niech b będzie najmn. elem. B.

TO JEST NASTĘPNIK a.

Tw. Zał. że $(L, \leq)$ jest dobrym porządkiem takim, że

1) $L \neq \emptyset$
2) L nie ma ~~elem.~~ największego
3) każdy element L różny od najmniejszego elementu L ma poprzednik.

Wtedy $(L, \leq) \underset{\text{izo}}{\cong} (\mathbb{N}, \leq)$.

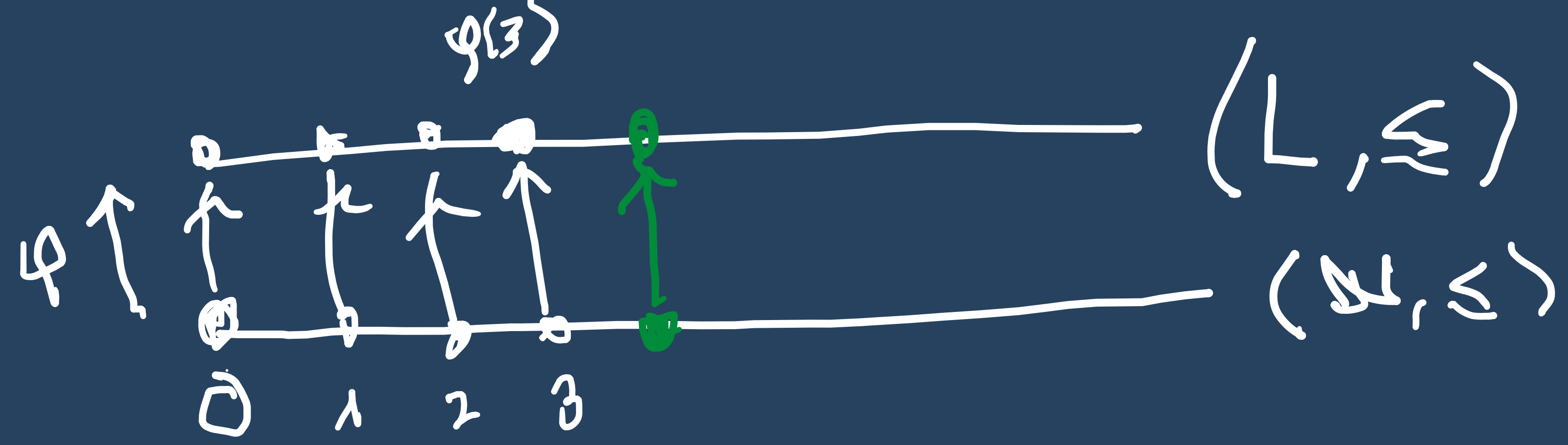
D-d. Definiujemy funkcję $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow L$.

- $\varphi(0)$ = najmniejszy element L
- zał. że mamy $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)$ określone

  i $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n)$

  $\varphi(n+1)$ = $\leqslant$-najmn element L większy od $\varphi(n)$

  (def. poprawne na mocy (2))



TEZA: $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} L$

D-d: Zał. że φ nie jest "na".

Niech $B = L \setminus rng(\varphi)$

Niech b = $\leq$-najmn. element B.

Wiemy, że $b \neq$ $\leq$-najmn. elem L

Niech c będzie poprz. b. $(c < b)$

Wtedy $c \notin B$, więc $c \in rng(\varphi)$

Jest $n \in \mathbb{N}$ t. że $\varphi(n) = c$

ALE WTEDY $\varphi(n+1) = b$ więc $b \in rng(\varphi)$ $\boxtimes$

CO WIEMY:

$$\left.\begin{cases} A \subseteq \mathbb{N} \\ a \in A \\ (\forall x \in A)(x+1 \in A) \end{cases}\right] \Longrightarrow (\forall x \geq a)(x \in A)$$

ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ

UWAGA: typowe sformułowanie:

Zał. że $\varphi(n)$ jest własnością liczb naturalnych. Zał. że ~~$\varphi(a)$~~ $a \in \mathbb{N}$ i $\varphi(a)$, oraz, że $(\forall n \in \mathbb{N})(\varphi(n) \to \varphi(n+1))$

wtedy $(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq a \to \varphi(n))$

$=$ φ jest funktorem zdaniowym na $\mathbb{N}$

D-d. Załóżmy, że φ spełnia powyższe własności. Niech

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n)\}.$$

- $a \in A$ (bo $\varphi(a)$)
- $(\forall n \in \mathbb{N})(n \in A \to n+1 \in A)$

$$\Downarrow$$

$$(\forall n \in A)(n+1 \in A)$$

ZATEM: $(\forall n \geq a)(n \in A)$

ZATEM: $(\forall n \geq a)\, \varphi(n)$. $\square$

Tw. Jeśli $(X, \leq)$ jest cz. porządkiem oraz X jest skończony, $X \neq \emptyset$, to w $(X, \leq)$ istnieje element minimalny.

D-d. (Indukcja matematyczna po $|X|$).

- $|X| = 1$. : wtedy $X = \{a\}$ dla pewnego a i wtedy a jest elem. minim.
- Zał. że tw. jest prawdziwe dla liczby naturalnej n.

  Pok. że jest ono prawdziwe dla liczby $n+1$.

Zał. że $|X| = n+1$. $(n \geq 1)$

Weźmy $a \in X$.

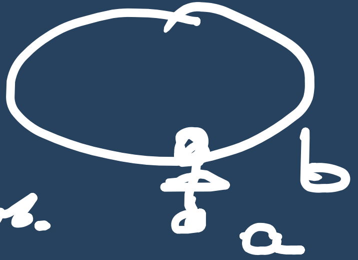
Niech $Y = X \setminus \{a\}$. Wtedy

▷ $|Y| = n$

▷ $(Y, \leq\restriction Y)$ – cz. porządek niepusty

W $(Y, \underbrace{\leq\restriction Y}_{\preccurlyeq})$ mamy element $\preccurlyeq$-minimalny.

Oznaczmy go przez b.



1) $a \leq b \wedge a \neq b \rightarrow a$ jest $\leq$-minim. w $(X, \leq)$

2) $\neg(a \leq b) \longrightarrow b$ jest $\leq$-minim. $\boxtimes$

Zatem, na mocy ZIM tw. jest prawdziwe

$\blacksquare$