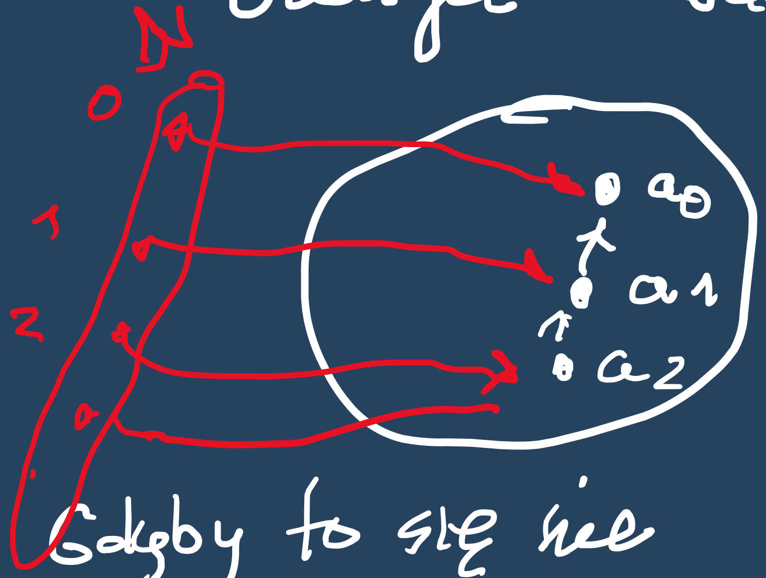
Pok. że : $(X,\leq)$ - skoń. cz. porz. $X\neq\emptyset$ $\Rightarrow (\exists a\in X)$(a jest minimalny).

Uwaga : bardziej algorytmicznie:



$(X,\leq)$

$a_0\in X$;

a_0 jest minimalny?

TAK → KONIEC

NIE → znajdujemy $a_1\in X$ t. że $a_1<a_0$

↓

a_1 jest minimalny

TAK → koniec

NIE → szukamy $a_2<a_1$

Gdyby to się nie skończyło

$f:\mathbb{N}\xrightarrow{1-1} X$

to jest niemożliwe

Z Ind. mat. po $|X|$.

Tw. Zał. że $(L_1,\le_1)$, $(L_2,\le_2)$ są liniowymi porządkami, $|L_1|=|L_2|=n\in\mathbb{N}$. Wtedy są one IZOMORFICZNE.

<u>D-d</u>. Indukcja po n. Dla $n=0,1$ ← OK

Zał. że tw. jest prawdz. dla $n\in\mathbb{N}$.

Weźmy dwa liniowe porz $(L_1,\le_1),(L_2,\le_2)$ t.że $|L_1|=|L_2|=n+1$.

Weźmy $a_1 = \le_1$-najmn. element z L_1, $a_2 = \le_2$-najmn. z L_2.

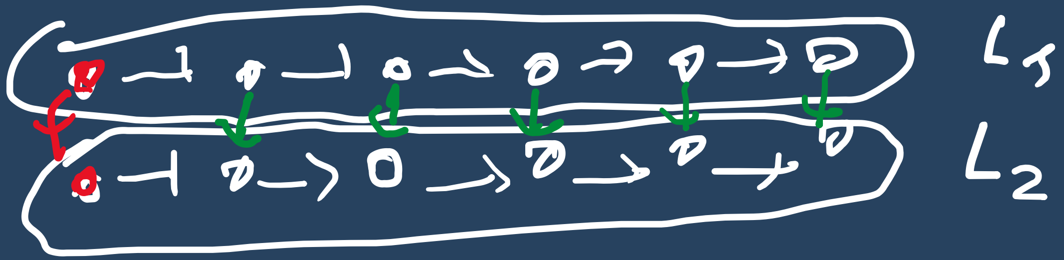
Niech $L_1^* = L_1\setminus\{a_1\}$, $L_2^* = L_2\setminus\{a_2\}$

• $|L_1^*| = |L_2^*| = n$

• $(L_1^*, \leq_1 \restriction L_1^*)$, $(L_2^*, \leq_2 \restriction L_2^*)$ – lin. porz.

Na mocy zał. ind. mamy $\varphi: L_1^* \xrightarrow[na]{1-1} L_2^*$

t.że $(\forall x,y \in L_1^*)(x \leq_1 y \longleftrightarrow \varphi(x) \leq_2 \varphi(y))$.



Niech $\psi = \varphi \cup \{(a_1, a_2)\}$

Wtedy $\psi: L_1 \xrightarrow[na]{1-1} L_2$ jest IZOMORF.

ZATEM, na mocy ZIM, twierdz. jest prawdziwe

Wniosek. $(L, \leq)$ jest lin. porz, $|L| = n$

$\Downarrow$

$$(L, \leq) \underset{\text{izo}}{\cong} (\{0, \ldots, n-1\}, \leq)$$

$\uparrow$ natur. nierówność z liczb $\mathbb{N}$.

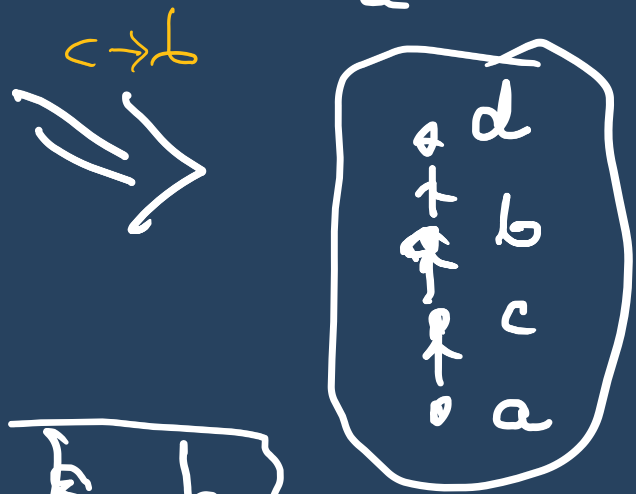
TW. (O sortowaniu topologicznym)

Zał. że $(X, \leq)$ jest skończ. częściowym porządkiem.

Istnieje liniowy porządek R na zbiorze X

t. że $\leq \subseteq R$. $\blacksquare$

P



P

$S = \{(a,a),(b,b)\}$

D-d. Indukcja po $|X| = n$.

- $n = 0 \leftarrow$ ok
- Załóż. że dla cz. porz mocy n jest OK.

Rozważmy cz. porz. $(X, \preccurlyeq)$ t. że $|X| = n+1$.

$(X, \leq)$

Niech a będzie $\preccurlyeq$-minim. elem. X.

Niech $Y = X \setminus \{a\}$. Wtedy $|Y| = n$.

Jest liniowy porządek S t. że

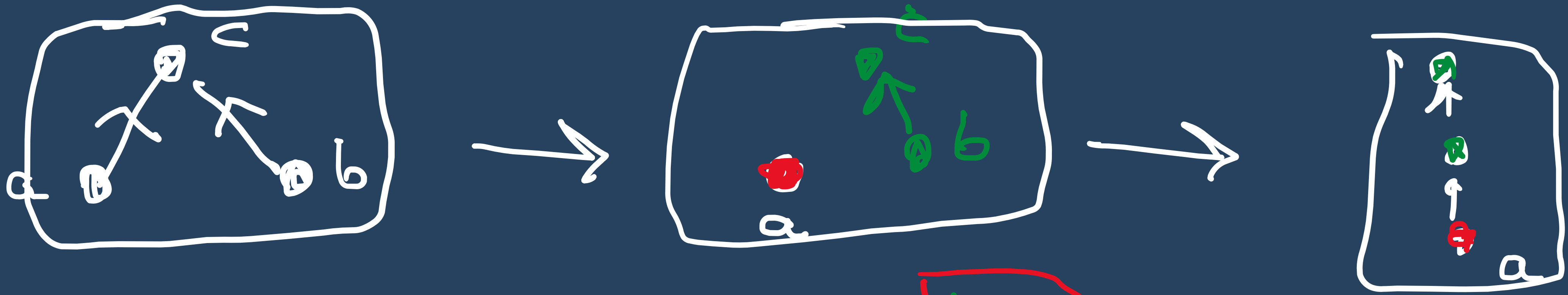
$$(\preccurlyeq \restriction Y) \subseteq S.$$

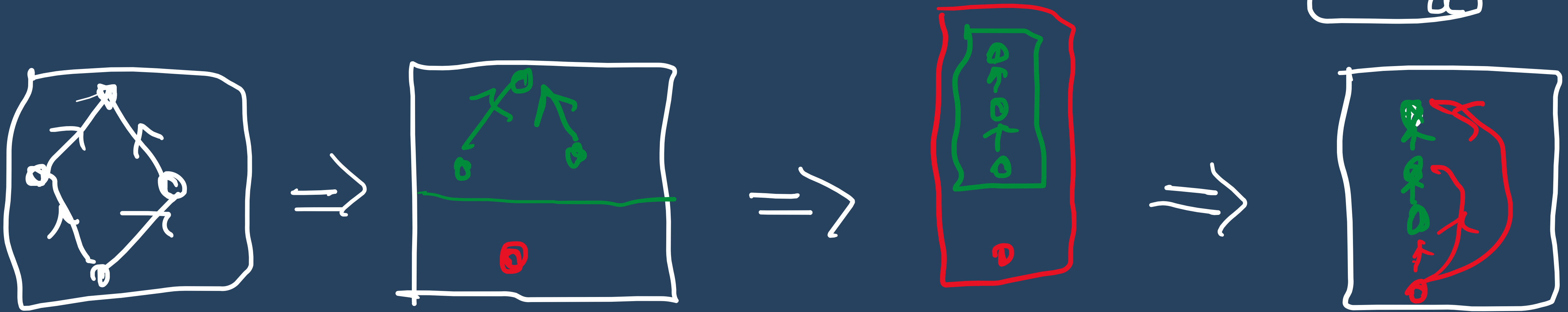
Połóżmy $R = S \cup (\{a\} \times Y) \cup \{(a,a)\}$

- R jest cz. porz
- R jest lin. porz.

$\blacksquare$

P





DYGRESJA: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

① Ind: $n=1$ $\qquad 1 = \frac{1\cdot 2}{2}$ ok

Krok ind:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\text{zał}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \blacksquare$$

② $S = 1 + 2 + \ldots + n$

$S = n + (n-1) + \ldots + 1$

$$2\cdot S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}_{n} = n(n+1)$$

$$S = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad \blacksquare$$

Operacje mnogościowe.

(F1) $\left.\begin{array}{l} |A| = n \in \mathbb{N} \\ b \notin A \end{array}\right] \Longrightarrow |A \cup \{b\}| = n+1$

<u>D-d</u>.

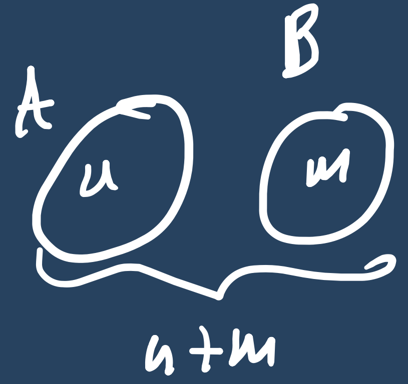
$\varphi : \{0, \dots, n-1\} \xrightarrow[na]{1-1} A$

$\varphi^* = \varphi \cup \{(n, b)\}$

$\varphi^* : \{0, \dots, n\} \xrightarrow[na]{1-1} A \cup \{b\}$.

$\blacksquare$

(F2) $\left.\begin{array}{l} |A| = n \\ |B| = m \\ A \cap B = \emptyset \end{array}\right] \Longrightarrow |A \cup B| = n+m$.



D-d. Ind. po m $(=|B|)$

• $(m=0) \equiv (B=\emptyset) \to |A\cup B| = |A| = n$

$= n+0$

$= |A|+|B|$.

• Załóż. że dla m tw. jest prawdz., Mamy $|A|=n$, $|B|=m+1$, $A\cap B=\emptyset$.

$|\tilde{B}|=m$

Wybieramy $b\in B$; $\tilde{B} = B\setminus\{b\}$. Wtedy

$$|A\cup B| = |A\cup(\tilde{B}\cup\{b\})| = |(A\cup\tilde{B})\cup\{b\}| =$$

$$= |A\cup\tilde{B}|+1 \overset{\text{zał. ind.}}{=}$$

$$= (n+m)+1 = n+(m+1) = |A|+|B|$$

$\blacksquare$

F3 $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

D-d. ind. po $|B| = m$.

- $m = 0$; $|A \times B| = |A \times \emptyset| = |\emptyset| = 0$

  $|A| \cdot |B| = |A| \cdot 0 = 0$

- załóż. że dla $|B| = m$ jest ok.

  Bierzemy $|B| = m+1$. Ustalamy $b \in B$

  Wtedy

A

$\wr\wr$

$$|A \times B| = |A \times ((B \setminus \{b\}) \cup \{b\})| =$$

$$= |\underbrace{(A \times (B \setminus \{b\})) \cup (A \times \{b\})}_{\text{rozł.}}| \overset{(F2)}{=} |A \times (B \setminus \{b\})| + |A \times \{b\}|$$

$$= |A| \cdot m + |A| =$$

$$= |A| \cdot (m+1) = |A| \cdot |B| \ \blacksquare$$

F4. Jeśli A, B są skończone, to

$$|A^B| = |A|^{|B|}.$$

D-d. $|A|=0$: zostawiam jako zadanie

Zał. że $|A| \neq 0$. Ind. po $|B|$.

- $|B|=0$ $(B=\emptyset)$: $|A^B| = 1$ $\quad A^B = \{\emptyset\}$

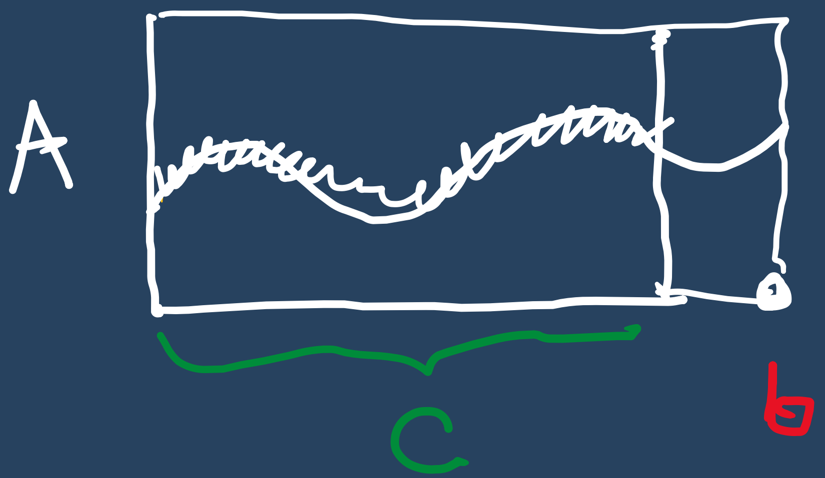
  $|A|^{|B|} = |A|^0 = 1$

- Załóżmy, że dla $|B|=n$ jest OK.

  Bierzemy $|B| = n+1$.

  Ustalamy $b \in B$. Niech $C = B \setminus \{b\}$.

$C = B \setminus \{b\}$, $b \in B$. $B = C \cup \{b\}$ $\quad |A^B| = |A|^{|B|}$



Dla $f \in A^B$ określmy

$$\varphi(f) = (f \upharpoonright C, f(b))$$

$$\varphi : A^B \longrightarrow A^C \times A$$

CLAIM: to jest bijekcja

• $\varphi(f) = \varphi(g) \equiv (f \upharpoonright C, f(b)) = (g \upharpoonright C, g(b)) \Longrightarrow ((f(b) = g(b)) \wedge (f \upharpoonright C = g \upharpoonright C))$

$\Longrightarrow f = g$.

[$x \in B$:
1) $x = b$: $f(b) = g(b)$
2) $x \neq b$; $x \in C$
$f(x) = (f \upharpoonright C)(x) = (g \upharpoonright C)(x) = g(x)$]

$$\varphi : A^B \xrightarrow[\text{na}]{1-1} A^C \times A$$

- φ jest „na"!

Weźmy $(h, a) \in A^C \times A$.

Połóżmy $f = h \cup \{(b,a)\}$

wtedy $\varphi(f) = (h, a)$ $\boxtimes$

$$|A^B| = |A^C \times A| = |A^C| \cdot |A| \overset{\text{zał. ind}}{=} |A|^{|C|} \cdot |A|$$

$|C| = n$

$$= |A|^{|C|+1} = |A|^{|B|}$$

$\boxtimes$

$$|A^B| = |A|^{|B|}$$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

skończone

F5. $|P(A)| = 2^{|A|}$ dla skończ A.

D-d. ind. po $|A| = n$

- $n = 0 \equiv A = \emptyset$: $|P(A)| = |P(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1$

  $2^{|A|} = 2^0 = 1$.

- Załóż, że dla $|A| = n$ jest ok.

  Bierzemy $|A| = n+1$. Ustalamy $a \in A$.

$$|\mathcal{P}(A)| = |\{X \in \mathcal{P}(A) : a \notin X\} \cup \{X \in \mathcal{P}(A) : a \in X\}|$$

$$= |\{X \in \mathcal{P}(A) : a \notin X\}| + |\{X \in \mathcal{P}(A) : a \in X\}|$$

$$= |\mathcal{P}(\underbrace{A \setminus \{a\}}_{n})| + |\{Y \cup \{a\} : Y \in \mathcal{P}(A \setminus \{a\})\}|$$

$$\overset{!}{=} 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

$$\varphi : \mathcal{P}(A \setminus \{a\}) \xrightarrow[1-1]{na} \{Y \cup \{a\} : Y \in \mathcal{P}(A \setminus \{a\})\}$$

$$\varphi(Y) = Y \cup \{a\}$$

$\boxtimes$

$a \notin A \setminus \{a\}$

Zadanie: wyprowadź wzór $|P(A)| = 2^{|A|}$ ze wzoru

$$|A^B| = |A|^{|B|}.$$