Kod z ostatniego wykładu:

```
int nwd(int x, int y) {
    while (x != y) {
        if (x>y) { x = x-y; }
        else     { y = y-x; }
    }
    return x;
}
```

CEL: pokonanie zbieżności

Przestrz. stanów

$$\Omega = \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$$

$(17, 5) \rightsquigarrow (12, 5) \rightsquigarrow (7, 5) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow (2, 5) \rightsquigarrow (2, 3) \rightsquigarrow (2, 1)$

$\rightsquigarrow (1, 1)$

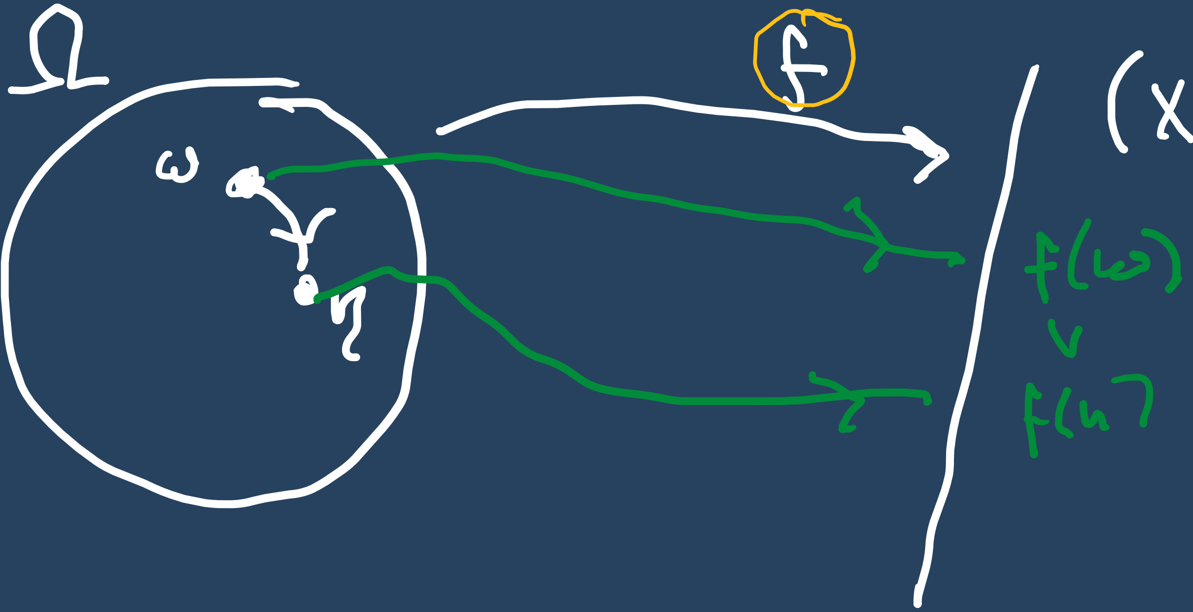
$$f((x,y)) = x+y$$

$$(x,y) \rightsquigarrow (x',y') \Rightarrow f((x',y')) < f(x,y)$$

WNIOSEK: gdyby pętla obracała nieskończenie długo, to otrzymalibyśmy ciąg $(x_n, y_n) \in \Omega$ t. że

$$(\forall n)\left(f((x_n, y_n)) > f((x_{n+1}, y_{n+1}))\right)$$

A TO NIE JEST MOŻLIWE.



$(X, \leq)$ - d. upor.

Ogólna strategia dowodzenia wł-ści algor.

Dowód popr. algebraicznej!

FAKT: $\left.\begin{array}{l} x, y \in \mathbb{N}^{+} \\ x < y \end{array}\right\} \rightarrow NWD(x, y) = NWD(x, y-x)$

$(12, 4) \longrightarrow (8, 4) \longrightarrow (4, 4) \longrightarrow 4$

$NWD(8,4) = a \qquad nwd = a \qquad a$

$a = NWD(12, 4)$

Inne: funkcja (matem) NWD

jest <u>niezmiennikiem</u> wewn. pętli

Powtórka z poprz. wykładu:

Tw. Jeśli $n, m \in \mathbb{N}$ oraz $\left(\exists \varphi : \{1, \ldots, n\} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \{1, \ldots m\}\right)$, to $n = m$.

Wniosek. Pojęcie $|A| = n$ jest dobrze określone.

D-d. Zał. że $|A| = n$, $|A| = m$ $(n, m \geqslant 1)$

- $\varphi : \{1, \ldots, n\} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} A$
- $\psi : \{1, \ldots, m\} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} A$

$$\begin{tikzcd}
\{1, \ldots, n\} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, bend right, "\psi^{-1} \circ \varphi"'] & A \arrow[d, "\psi^{-1}"] \\
& \{1, \ldots, m\}
\end{tikzcd}$$

$\psi^{-1} \circ \varphi$: bij.

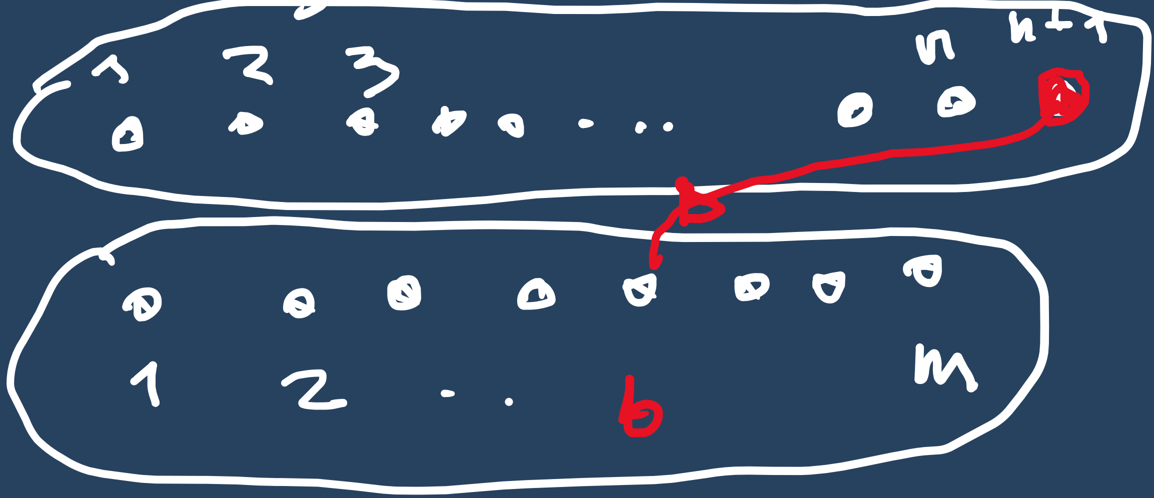
zatem $n = m$.

D-d. Ind. po n.

$$\varphi(n) = (\forall m)\left[(\exists \tilde{\varphi})\left(\tilde{\varphi} : \{1, \ldots, n\} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \{1, \ldots, m\}\right) \to m = n\right]$$

- $n=1$: ok
- zał. że wiemy, że $\varphi(n)$.

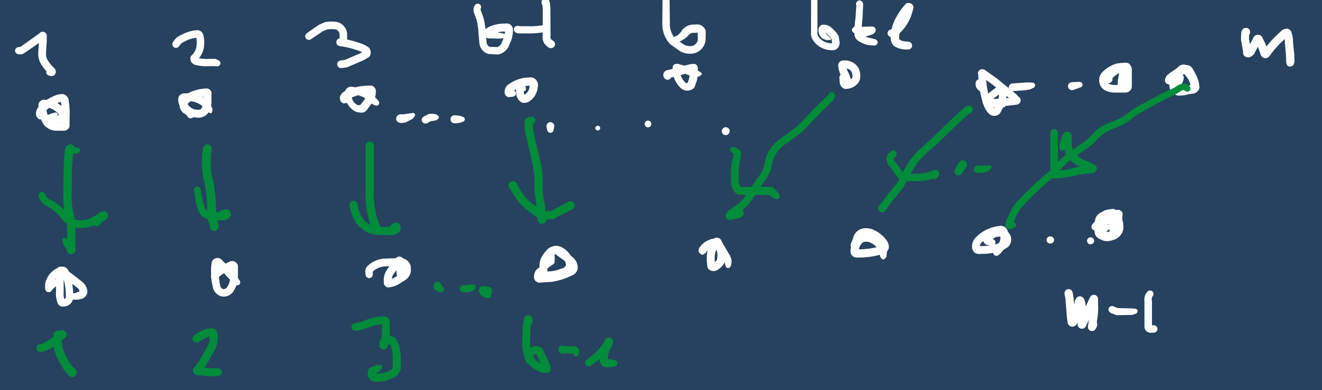
weźmy dowolne m. zał. $f : \{1, \ldots, n+1\} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \{1, \ldots, m\}$



$b = f(n+1)$

$f^* = f \restriction \{1, \ldots, n\}$

$f^* : \{1, \ldots, n\} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \{1, \ldots, m\} \setminus \{b\}$



$$\alpha(x) = \begin{cases} x : & x < b \\ x-1 : & x \in \{b+1, \ldots, m\} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} \{1, \ldots, m\} \setminus \{b\} \arrow[r, "1-1"', "\text{NA}"] & \overbrace{\{1, \ldots, m-1\}} \\ \underbrace{\{1, \ldots, n\}} \arrow[u, "f^*"] \arrow[ur, bend right, "\alpha \circ f^*", "1-1,\ \text{NA}"'] & \end{tikzcd}$$

Z ZAŁ. IND. MAMY $n = m - 1$

ZATEM $n+1 = (m-1)+1 = m$ $\blacksquare$

Zadanie: Pok., że A, B - skończ.
$|A| = |B|$; $f: A \longrightarrow B$: WTEDY $\Leftrightarrow$

1) f jest injekcją

2) f jest bijekcją

wsk. 1) → 2) : często

2) → 1) : niewprost.

PORZĄDEK LEKSYKOGRAFICZNY NA SŁOWACH.

Otoczka Kleene'go.

X - ustalony zbiór, $X \neq \emptyset$

$$X^* = \bigcup_{n \geq 0} X^n \qquad X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n}$$

↑ otoczka Kleenego zbioru X.

"zbiór wszystkich skończ. ciągów elem. X

$X^0 = \{\varepsilon\}$ $\quad \varepsilon \leftarrow$ ciąg długości 0.

$\mathrm{len}(x) =$ długość ciągu $x \in X^*$

- konkatenacja

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$
$$y = (y_1, \dots, y_m)$$

$$x * y = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

TO JEST BINARNE DZIAŁANIE NA X^*

- $x * \varepsilon = x$, $\varepsilon * x = x$ $\equiv$ ε jest elem. neutralnym.
- $(x * y) * z = x * (y * z)$ łączność

Def. $(A, \circ, e)$ jest MONOIDEM

$\Leftrightarrow$

$\circ$ jest łącznym działaniem na X, e jest elementem neutralnym.

P

$(\mathbb{N}, +, 0)$ ← monoid

$(\mathbb{N}^+, \cdot, 1)$ ←

$(X^*, *, \varepsilon)$

DEF. Dla $x, y \in X^*$:

$$x \sqsubseteq y \equiv (\exists z \in X^*)(y = x * z)$$

FAKT. $(X^*, \sqsubseteq)$ jest cz. porządkiem

$\left\{ \begin{array}{l} x * \varepsilon = x \\ \text{czyli} \\ x \sqsubseteq x \end{array} \right.$

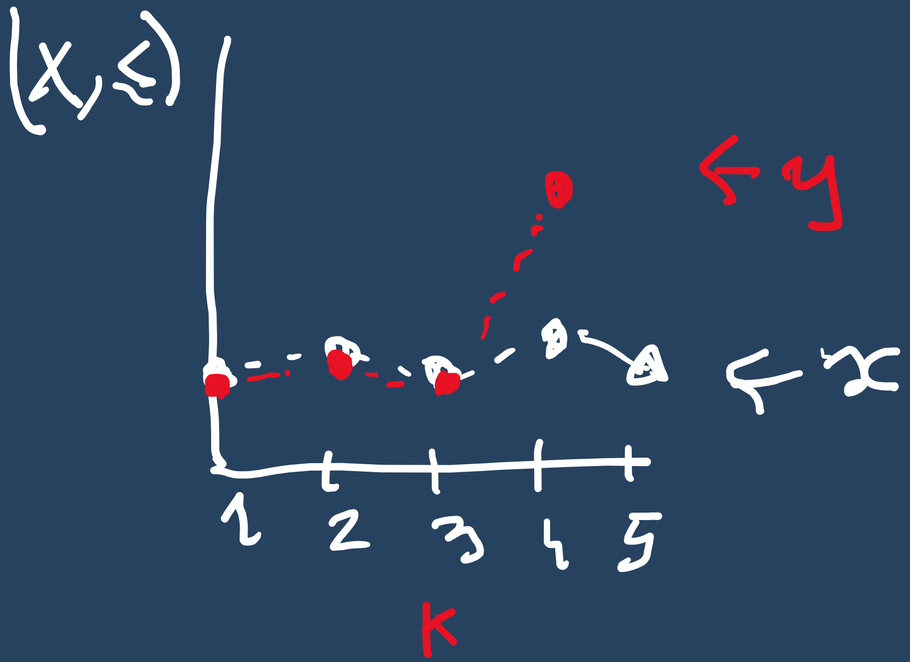
D-d. zadanie.

Porz. leksyk.

na zbiorze X mamy liniowy porządek $\leq$.

DEF.

$$x \preccurlyeq_{lek} y \equiv (x \sqsubseteq y) \vee (\exists k) \big((1 \leq k \leq \min(\ell(x), \ell(y))) \wedge (\forall i)(1 \leq i < k \to x_i = y_i) \wedge (x_k < y_k) \big)$$



Przykład : ASCII

$$\underbrace{aaaaa}_{x} \prec_{lex} \underbrace{aaba}_{y}$$

$a < b$

CEL : $\prec_{lex}$ jest liniowym porządkiem na X^*

① ZWROTNOŚĆ : $x \leq_{lex} x$ ✓

Dk: bo $x \subseteq x$.

② Zał. że $x \leq_{lex} y$ i $y \leq_{lex} x$.

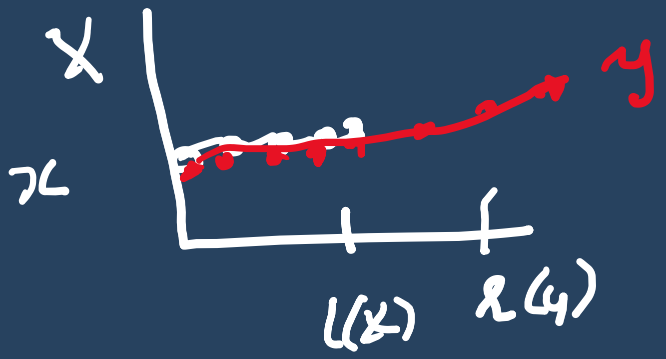
$$D = \{ i : 1 \leq i \leq \min\{\ell(x), \ell(y)\} \wedge x_i \neq y_i \}$$

• P1: $(D = \emptyset)$. $1 \leq i \leq \min(\ell(x), \ell(y)) \rightarrow x_i = y_i$

P1a. Zał. że $\ell(x) \leq \ell(y)$
wtedy $x \subseteq y$

P1b. Zał. że $\ell(x) > \ell(y)$
wtedy $y \subseteq x$.

✓ $x = y$.



• P2 $(D \neq \emptyset)$
niech $k = \min(D)$.

• $1 \leq i < k \rightarrow x_i = y_i$
• $x \leq_{lex} y \rightarrow x_k < y_k$
• $y \leq_{lex} x \rightarrow y_k < x_k$

sprz.

(3) $x \leqslant_{lex} y \wedge y \leqslant_{lex} z$

$$D = \{ i : 1 \leqslant i \leqslant \min\{\ell(x), \ell(y)\} \wedge x_i \neq y_i \}$$
$$E = \{ i : 1 \leqslant i \leqslant \min\{\ell(y), \ell(z)\} \wedge y_i \neq z_i \}.$$

P1. $D = \emptyset \wedge E = \emptyset$. wtedy $x \sqsubseteq y$ i $y \sqsubseteq z$

zatem $x \sqsubseteq z$ więc $x \leqslant_{lex} z$.

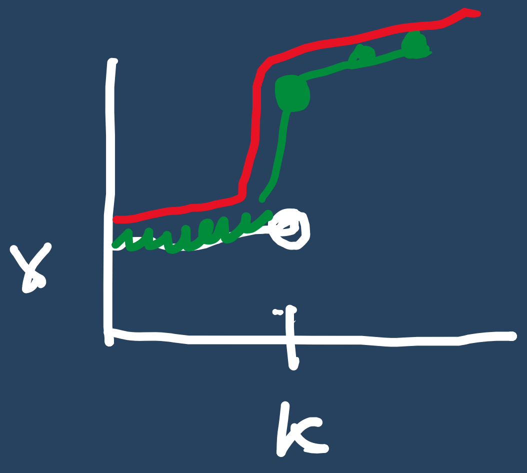
P2. $D \neq \emptyset \wedge E = \emptyset$: mamy $y \sqsubseteq z$.

$k = \min(D)$; $x_k < y_k$

ale $z \sqsupseteq y$, więc $y_k = z_k > x_k$

$1 \leqslant i < k \rightarrow x_i = y_i = z_i$

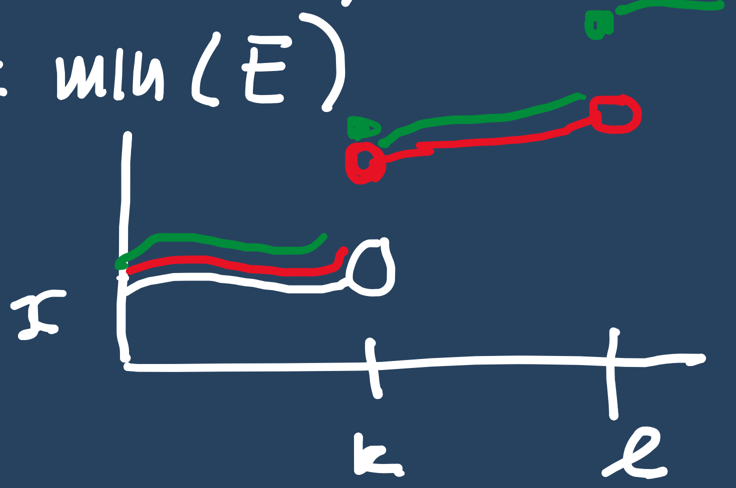
zatem $x \leqslant_{lex} z$.



P3. $D = \emptyset \wedge E \neq \emptyset$: zadanie

P4. $D \neq \emptyset \wedge E \neq \emptyset$: $k = \min(D)$

$l = \min(E)$



P4a. $k < l$

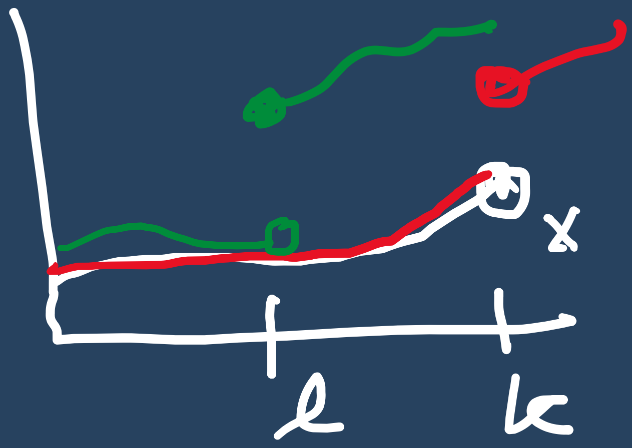
$x_k < z_k$

$1 \leq i < k \rightarrow x_i = z_i$

P4b. $k > l$

$1 \leq i < l \rightarrow x_i = z_i$

$x_l < z_l$



P4c. $k = l$

• Liniowość: Mamy $x, y \in X^*$.

$$D = \{ i : 1 \leq i \leq \min\{ l(x), l(y) \} \wedge x_i \neq y_i \}.$$

• $D = \emptyset$: $l(x) \leq l(y) \rightarrow x \subseteq y \rightarrow x \leq_{lex} y$

$l(y) \leq l(x) \rightarrow y \subseteq x \rightarrow y \leq_{lex} x$

• $D \neq \emptyset$:

$k = \min(D)$ $\quad 1 \leq i < k \rightarrow x_i = y_i$.

• $x_k < y_k \longrightarrow x \leq_{lex} y$

• $y_k < x_k \longrightarrow y \leq_{lex} x$

$\square$