UWAGA: $\Phi : (A^B)^C \longrightarrow A^{B\times C}$

Dla $f \in (A^B)^C$ określamy $\Phi(f) \in A^{B\times C}$

wzorem:

$$\Phi(f)(\underbrace{(b,c)}_{\in B\times C}) = (f(c))(b)$$

$f(c) \in A^B$
$b \in \mathrm{dom}(f(c))$
wart. $(f(c))(b)$
jest jedn.
określona

$$\Phi(f) = \{((b,c), (f(c))(b)) : b\in B \wedge c\in C\}$$

$g \in A^{B\times C}$

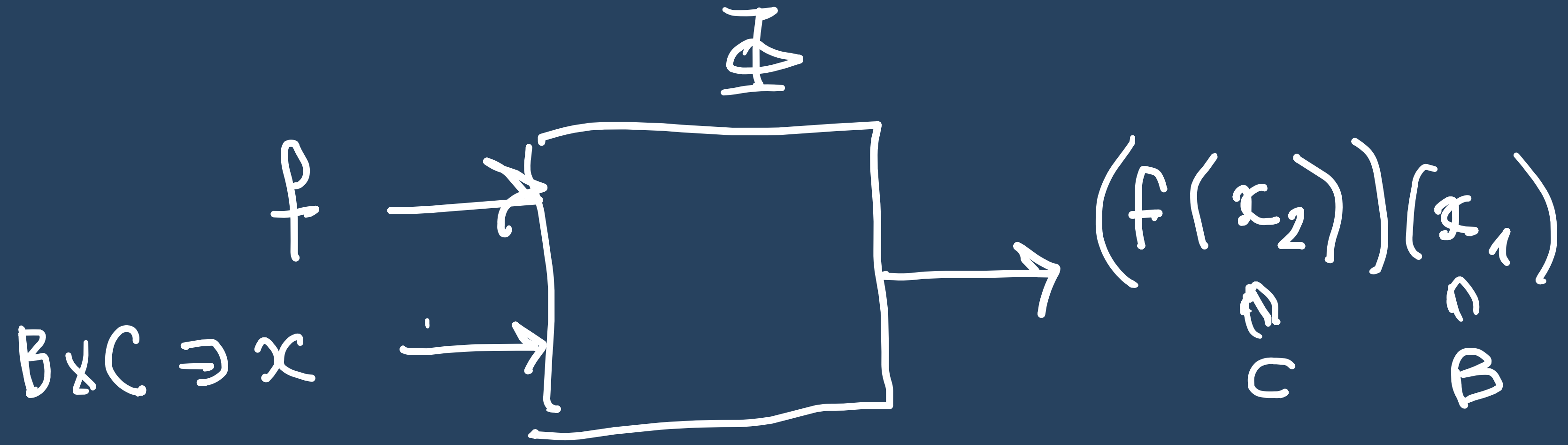
$$(\Phi^{-1}(g)(c))(b) = g((b,c))$$

$$\Phi^{-1} = \{(g, \{(c, \{(b, g(b,c)) : b\in B\}) : c\in C\}$$

$$\Phi(f)((b,c)) = (f(c))(b)$$

$$f(x_2) \in A^B$$

$$\Phi(f) \in A^{B \times C}, \quad f \in (A^B)^C$$



wygodne języki progr.: "funkcje ≡ first class objects"

C: "first class": int, float, pointery

$f(c)(b) \Leftrightarrow (f(c))(b)$

1) wyznacz $g = f(c)$
2) ret. $g(b)$

ⓟ $(N^N)^N$:

$f(c) =$ int X (int x) {return x+c;}

$f(2) =$ ' ~~dodaccz~~ 2 do x^4

$(f(4))(x) = x+4.$ $\qquad f(c)(x) = x+c$

$$\Phi(f)((x,c)) = (f(c))(x) = x+c.$$

$(N^N)^N$: Int ⇒ (Int ⇒ Int)

$N^{N\times N}$: Int × Int ⇒ Int

↕ currying

MOCE: (P) $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \aleph_0^{\aleph_0}$.

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

$$\boxed{|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}}$$

$$\Sigma^3 = \Sigma \times \Sigma \times \Sigma$$

~~FAKT~~ Przypomnienie: $\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n$ ← otoczka Kleenego Σ.

zbiór wsz. skończ. ciągów. elem Σ

U1. $\Sigma \neq \emptyset \longrightarrow (\Sigma^*$ jest nieskończony$)$

D-d: $a \in \Sigma$

$(a), (a,a), (a,a,a), \ldots \in \Sigma^*$

U2. $|\Sigma| \leq \aleph_0 \longrightarrow (\forall n)(|\Sigma^n| \leq \aleph_0)$

ε

$\Sigma^0 = \{\emptyset\}$

D-d: ind. po $n \geq 1$.

$\underset{\text{przel.}}{\Sigma^{n+1} = \Sigma^n} \times \underset{\text{przel.}}{\Sigma}$ $\leftarrow$ przeliczalny

(bo mamy $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$)

$\boxtimes$

WNIOSEK: $|\Sigma| \le \aleph_0$, $\Sigma \ne \emptyset$

$$\Downarrow$$

$$|\Sigma^*| = \aleph_0$$

D-d. wynika z tego, że suma przel.-wiele zb. przelicz. jest przeliczalna.

WNIOSEK: (Σ = ASCII), $|ASCII^*| = \aleph_0$.

$\mathcal{P} \subseteq ASCII^*$: $P \in \mathcal{P} \iff P$ jest popr. progr. w języku C.

$$|\mathcal{P}| = \aleph_0.$$

Chcemy określić pojęcie obliczalnej funkcji z $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Rozważamy wariant C_N języka C:

jedyny typ to nat ($\equiv$ unsigned int)

"Poprawny program" ⟶

```
nat f(nat x){
}

void main() {
  nat x;
  x = read();
  print(f(x));
}
```

"Dobry program"

Dla każdego $x \leftarrow$ Input zwraca nam wynik.

P - dobry program:

$[P](x)$: wynik programu.

- $\mathcal{D}$ = zbiór dobrych programów

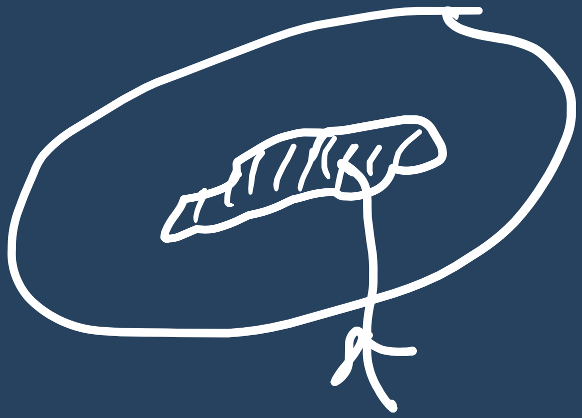
  $\mathcal{D} \subseteq ASCII^*$ ← przeliczalny

  $\mathcal{D}$ - nieskończony.
- $|\mathcal{D}| = \aleph_0$.
- $\mathcal{D} = (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- $f_n = \{(k, [P_n](k)) : k \in \mathbb{N}\}$

  $OBL = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$

WNIOSEK: $|OBL| = \aleph_0$

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$



OBL.

$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = c$

$> \aleph_0$

(P) zagadnienie <u>nierozstrz.</u>

Mamy $P, Q \in$ popr. progr.,

Q: Czy $(\forall n)\big([P](n) = [Q](n)\big)$?

AKSJOMAT WYBORU (AC)

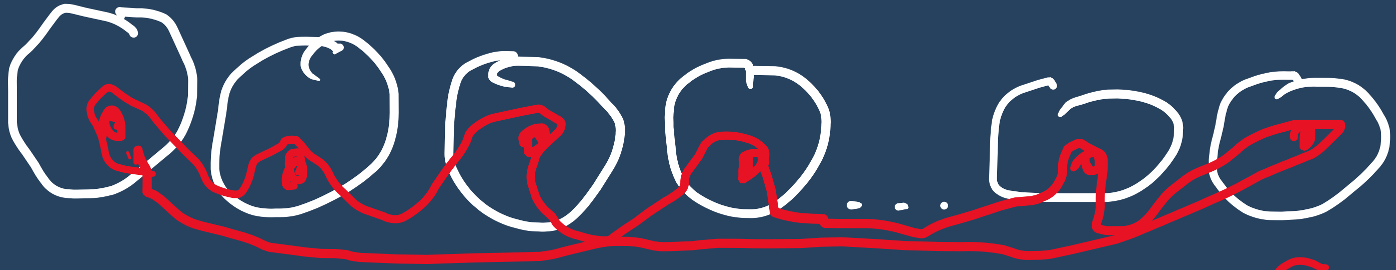
AC $\equiv$ dla dowolnej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ t. że

1) $(\forall A \in \mathcal{A})(A \neq \emptyset)$

2) $(\forall A, B \in \mathcal{A})(A \neq B \rightarrow A \cap B = \emptyset)$

istnieje zbiór S t. że

$$(\forall A \in \mathcal{A})(|S \cap A| = 1).$$



S – selektor rodziny $\mathcal{A}$.

Def. Niech $\mathcal{A} = (A_t)_{t\in T}$.

Produkt uogólniony $\mathcal{A}$:

$$\prod_{t\in T} A_t = \{f \in (\bigcup_{t\in T} A_t)^T : (\forall t\in T)(f(t)\in A_t)\}.$$

(P) ~~...~~ $A_n = \{0,1\}$; $n \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{A} = (A_n)_{n\in \mathbb{N}}$.

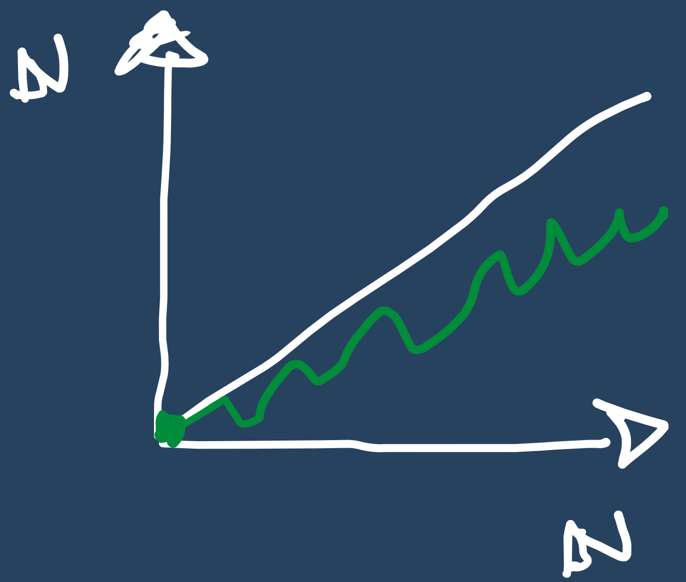
$$\prod_{n\in \mathbb{N}} A_n = \prod_{n\in \mathbb{N}} \{0,1\} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

P

$A_n = \{0, \dots, n\}$; $n \in \mathbb{N}$

$\prod_n A_n = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \leq n)\}$

$= \{0\} \times \{0,1\} \times \{0,1,2\} \times \dots$



Tw. AC jest równoważne zdaniu

"dla dowolnej rodziny $(A_t)_{t\in T}$ zbiorów niepustych mamy

$$\prod_{t\in T} A_t \neq \emptyset."$$

D-d. ($\Rightarrow$). Zał. że $(\forall t\in T)(A_t \neq \emptyset)$.

Niech $B_t = \{t\}\times A_t$.

- $(\forall t\in T)\ B_t \neq \emptyset$
- $(\forall t_1,t_2\in T)\ (t_1\neq t_2 \longrightarrow B_{t_1}\cap B_{t_2} = \emptyset)$

niech S - selektorem $(B_t)_{t\in T}$.

$$1 = |S \cap B_t| = |S \cap (\{t\} \times A_t)|$$

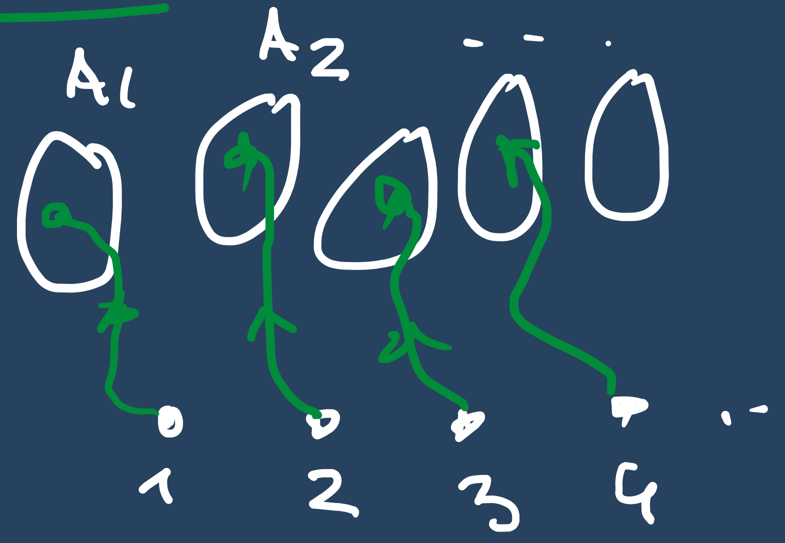
S - definiuje funkcję $t \rightsquigarrow A_t$

$$\tilde{S} = S \cap \left(T \times \left(\bigcup A_t\right)\right)$$

$$\cancel{\tilde{S} : T \to} \qquad \tilde{S} \in \prod_{t \in T} A_t .$$

$\Leftarrow$ $(A_t)_{t\in T}$ – rodz. zb. niep. p. rozł.

Niech $f \in \prod\limits_{t\in T} A_t$.



Niech $S = \operatorname{rng}(f)$.

Z rozł. $(A_t)_{t\in T}$

mamy $|S \cap A_t| = 1$.

Tw [AC] Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$.

(1) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(|x-a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

(2) dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n \in N}$ liczb rzeczywistych takiego, że $\lim_n x_n = a$ mamy

$$\lim_n f(x_n) = f(a).$$

Uw. $(1) \to (2)$: tu nie trzeba AC.

D-d $(2) \to (1)$. Zał. że $\neg(1)$. wtedy

$$(\exists \varepsilon>0)(\forall \delta>0)(\exists x\in\mathbb{R})(|x-a|<\delta \wedge |f(x)-f(a)|\geq \varepsilon).$$

$$\neg(p\Rightarrow q) \equiv p\wedge\neg q$$

Ustalmy $\varepsilon>0$ t. że

$$(\forall \delta>0)(\exists x\in\mathbb{R})(\ldots\ldots).$$

Dla $\delta=\frac{1}{n}$ $(n\geq 1)$: $(\exists x\in\mathbb{R})(|x-a|<\frac{1}{n} \wedge |f(x)-f(a)|\geq\varepsilon)$

$$B_n = \{x\in\mathbb{R} : |x-a|<\frac{1}{n} \wedge |f(x)-f(a)|\geq\varepsilon)$$

- $(\forall n\geq 1)(B_n \neq \emptyset)$.
- zatem $\prod_{n\geq 1} B_n \neq \emptyset$.

Niech $x \in \prod_{n \geq 1} B_n$.

wtedy $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^+}$ i $(\forall n)(x(n) \in B_n)$.

Oznaczmy $x(n) = x_n$.

Mamy ciąg $(x_n)_{n \geq 1}$ t. że

$(\forall n)(x_n \in B_n)$

czyli

$(\forall n \geq 1)\left(|x_n - a| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon\right)$

ZATEM: • $\lim_n x_n = a$ czyli $\neg(2)$.

• $\neg\left(\lim_n f(x_n) = f(a)\right)$. $\blacksquare$