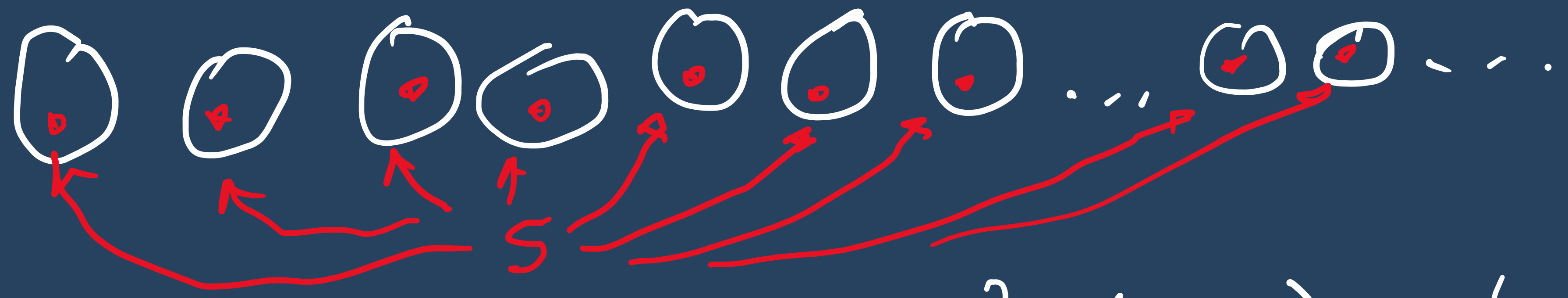
AC $\equiv$ każda rodz. zbiorów niepustych, parami rozłącznych ma selektor.



<u>UWAGA</u> 1. Jeśli $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ jest taka, że $(\forall i)(A_i \neq \emptyset)$ i $(\forall i,j)(i \neq j \to A_i \cap A_j = \emptyset)$ to $\mathcal{A}$ ma selektor.

D-d. Wybieramy $a_i \in A_i$ dla $i = 1, \dots, n$.
Kładziemy $S = \{a_1, \dots, a_n\}$. $\square$

<u>Uwaga</u> 2. Jeśli $\mathcal{A}$ – "dobra rodzina" i $(\forall A \in \mathcal{A})(A \subseteq \mathbb{N})$ ~~a~~, to $\mathcal{A}$ ma selektor.

D-d. Dla $A \in \mathcal{A}$ określamy

$$\varphi(A) = \min(A).$$

Wtedy $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$.

Kładziemy $S = \operatorname{rng}(\varphi)$. To jest selektor $\mathcal{A}$.

Def. WOP (well-ordering principle):

"Każdy zbiór można dobrze uporządkować!"

czyli:

$$WOP \equiv (\forall X)(\exists R)(R \subseteq X \times X \wedge R \text{ jest dobrym porz. } X)$$

Tw. $WOP \Rightarrow AC$.

D-d. Weźmy "dobrą" rodzinę $\mathcal{A}$.

Niech $\Omega = \bigcup \mathcal{A}$. Jest $\leq$ - dobry porz. na Ω.

Dla $A \in \mathcal{A}$:

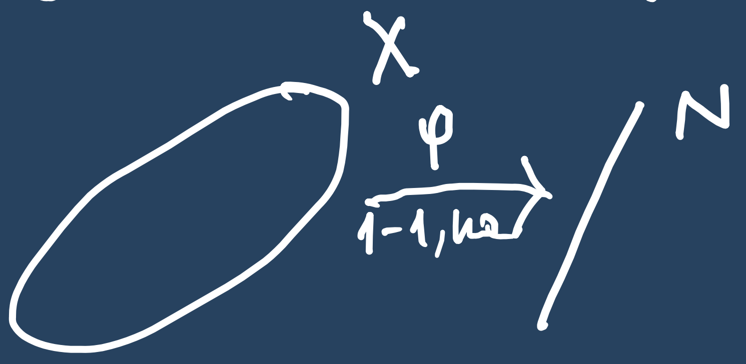
$$\varphi(A) = \leq\text{-}\min(A).$$

Wtedy $\operatorname{rng}(\varphi)$ jest selektorem.

Uwaga 3. Zał. że $|X| = \aleph_0$.

Wtedy na X istnieje dobry porządek.

D-d

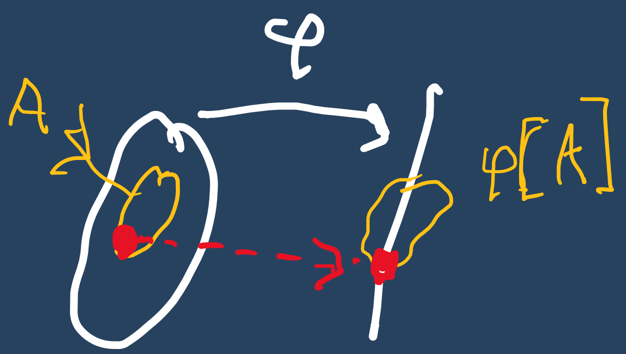


weźmy $\varphi : X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$.

„przenosimy $\leq$ z $\mathbb{N}$ na X"

Dla $x, y \in X$ określamy

$$x \preccurlyeq y \equiv \varphi(x) \leq \varphi(y)$$



wtedy $(X, \preccurlyeq) \underset{\text{izo}}{\cong} (\mathbb{N}, \leq)$.

Wn. Na $\mathbb{Q}$ jest d. porz.

Cz. porządki.

Ustalmy cz. porz. $\mathfrak{X} = (X, \leq)$.

(1) zbiór $L \subseteq X$ jest łańcuchem w $\mathfrak{X}$ jeśli

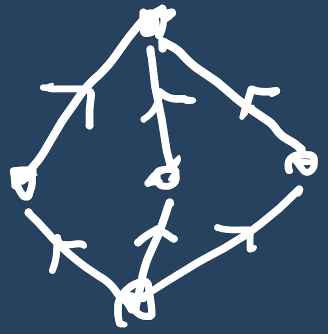
$\leq \restriction L$ jest liniowym porządkiem

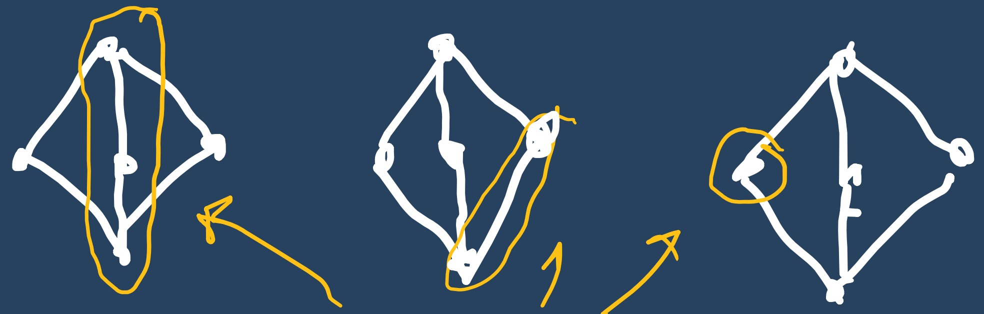
(czyli $(\forall x, y \in L)(x \leq y \vee y \leq x)$)

(2) zbiór $A \subseteq X$ jest antyłańcuchem w $\mathfrak{X}$ jeśli

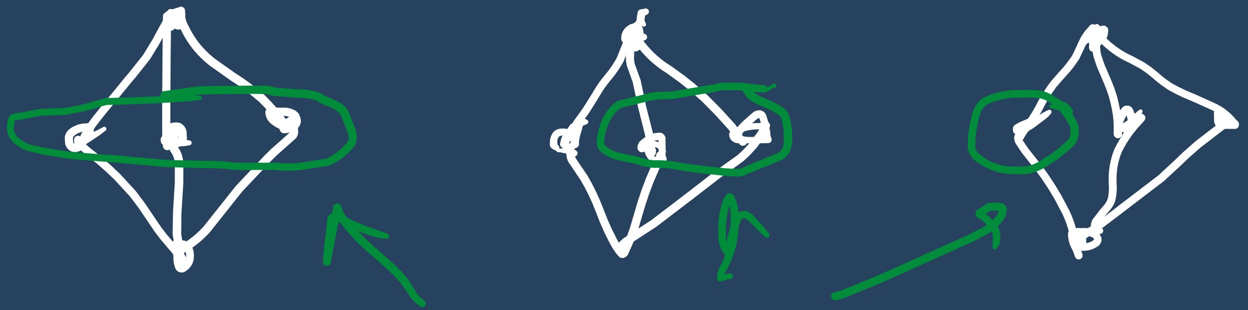
$(\forall x, y \in A)(x \neq y \rightarrow \neg(x \leq y \vee y \leq x))$

P



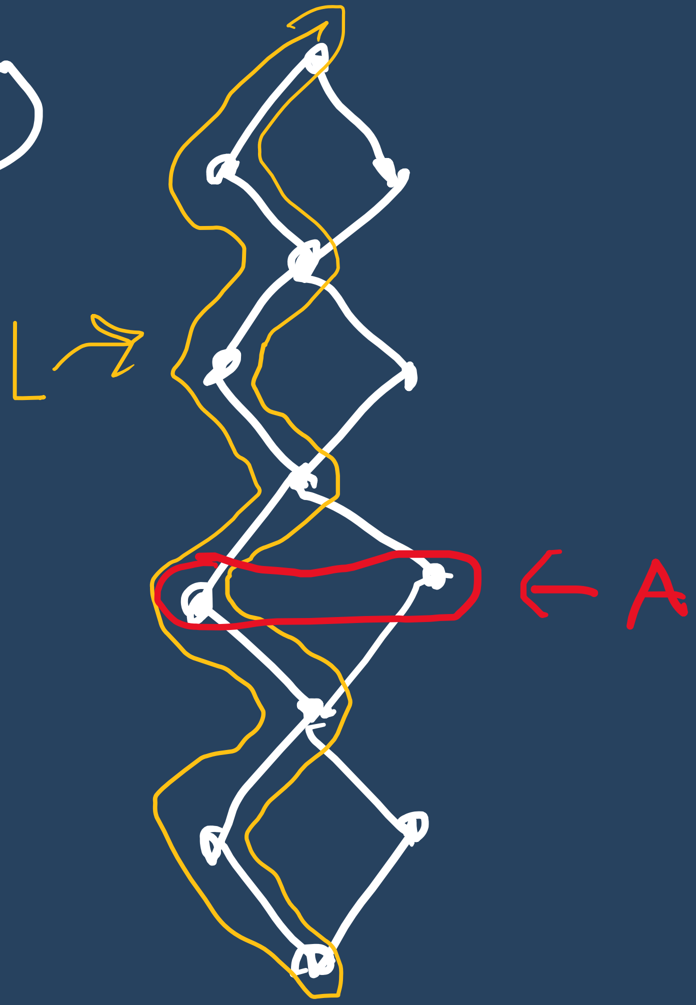


łańcuchy



antyłańcuchy

P

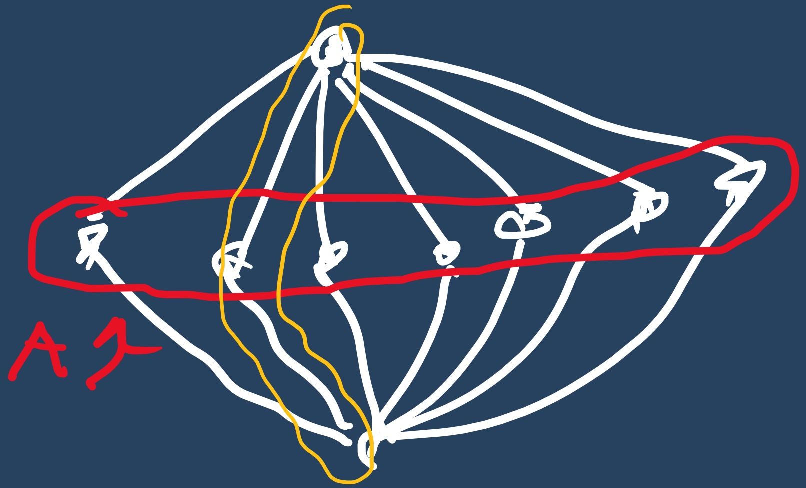


$|L| = 9$

A - antył.

$\Downarrow$

$|A| \leq 2$

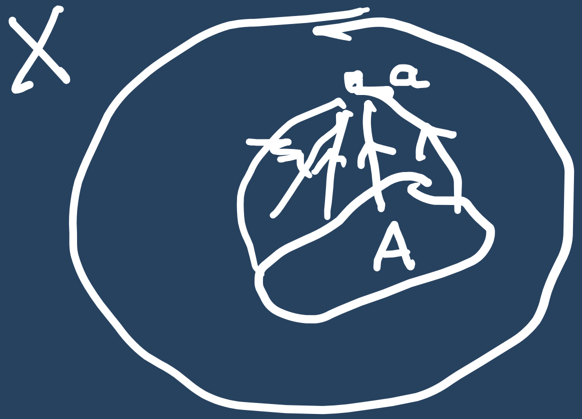


L - łań. $\to |L| \leq 3$

$|A| = 7$

$\mathfrak{X} = (X, \leq)$ – cz. porz.

- $\left.\begin{array}{l} A \subseteq X \\ a \in X \end{array}\right]$ a jest ograniczeniem górnym A jeśli $(\forall x \in A)(x \leq a)$.



(P) $(\mathbb{R}, \leq)$: $A = (0, 1)$

a jest ogr. górny A $\equiv$ $a \geqslant 1$

DEF. (Lemat Kuratowskiego-Zorna) [LKZ]

Zał. że cz. porz. $\mathcal{X} = (X, \leq)$ spełnia następującą własność:

$$(\forall L \subseteq X)(L\text{-łańcuch w } \mathcal{X} \to (\exists x \in X)(x \text{ jest ogr. górnym } L)).$$

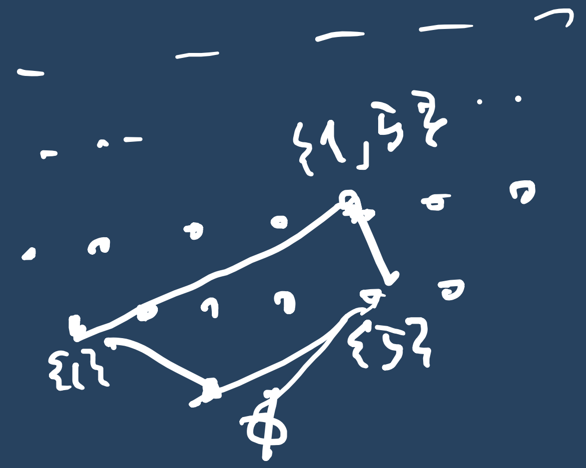
Wtedy w $\mathcal{X}$ jest element maksymalny.

Zaczynamy o 12^{10}.

(P) Niech $F = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| < \aleph_0\}$.

Niech $\mathcal{X} = (F, \subseteq)$.

Niech $L = \{\{0,\dots,n\} : n \in \mathbb{N}\}$.



$$\{0\} \subseteq \{0,1\} \subseteq \{0,1,2\} \subseteq \{0,1,2,3\} \subseteq \dots$$

ALE w F L nie ma ogr. górnego

BO: zał. że $A \in F$ t. że

$$(\forall n)(\{0,\dots,n\} \subseteq A)$$

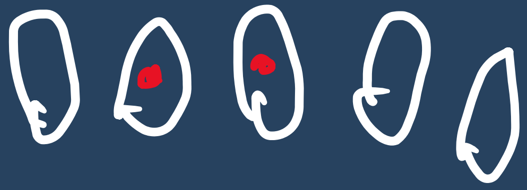
wtedy $(\forall n)(n+1 \leq |A|)$

więc $|A| = \aleph_0$, więc $A \notin F$.

(Z) w $\mathcal{X}$ nie ma elem. maksymalnych.

Tw. $\boxed{\text{LKZ} \longrightarrow \text{AC}}$

D-d. Ustalmy rodz. $\mathcal{A}$ zbiorów niepustych parami rozłącznych.



niech $X = \bigcup \mathcal{A}$.

niech $\mathcal{S} = \{S \subseteq X : (\forall A \in \mathcal{A})(|A \cap S| \leq 1)\}$

niech $\mathfrak{X} = (\mathcal{S}, \subseteq)$.

(1) Pok. że $\mathfrak{X}$ spełnia zał. LKZ.

Niech $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{S}$ ~~że~~ będzie łańcuchem

w $\mathfrak{X} = (\mathfrak{S}, \subseteq)$.

Niech $L = \bigcup \mathcal{L}$.

- $S \in \mathcal{L} \longrightarrow S \in \mathfrak{S} \longrightarrow S \subseteq X$

zatem $L \subseteq X$.

CLAIM: $(\forall A \in \mathcal{A})(|A \cap L| \leq 1)$.

[czyli: $L \in \mathfrak{S}$]

D-d claimu: zał. że jest $A \in \mathcal{A}$ t.że $|A \cap L| \geq 2$. Weźmy $a, b \in A \cap L, a \neq b$.

- $a \in L \longrightarrow$ jest $S_1 \in \mathcal{L}$ t.że $a \in S_1$
- $b \in L \longrightarrow$ jest $S_2 \in \mathcal{L}$ t.że $b \in S_2$

mamy $S_1, S_2 \in \mathcal{L}$ t. że $a \in S_1$ i $b \in S_2$.

ALE $\mathcal{L}$ jest łańcuchem.

zatem $S_1 \subseteq S_2$ lub $S_2 \subseteq S_1$.

możemy zał. że $S_1 \subseteq S_2$.

Wtedy $\{a, b\} \subseteq S_2$.

ALE $\{a, b\} \subseteq A$

ZATEM $\{a, b\} \subseteq S_2 \cap A$

więc $|A \cap S_2| \geqslant 2$. SPRZ.

(bo $S_2 \in \mathcal{G}$).

na mocy LKZ w

$$\left(\{S \subseteq \bigcup\mathcal{A} : (\forall A\in\mathcal{A})(|A\cap S|\leq 1)\}, \subseteq\right)$$

Istnieje element maks. S^*,

CLAIM: $(\forall A\in\mathcal{A})(|A\cap S^*|=1)$.

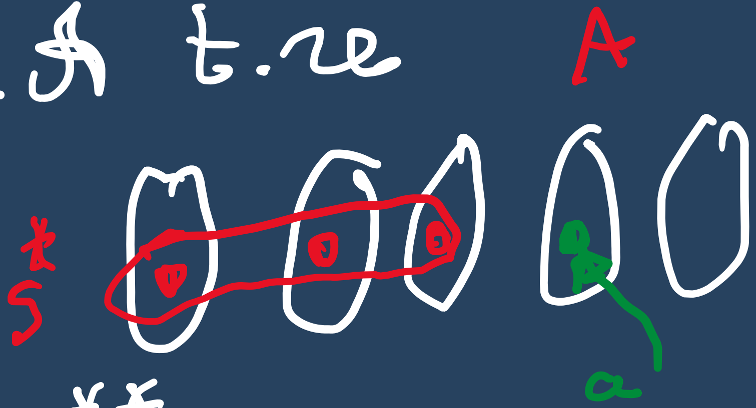
D-d claimu: Zał. że jest $A\in\mathcal{A}$ t.że

$|A\cap S^*|=0$.

niech $a\in A$ i $S^{**}=S^*\cup\{a\}$

wtedy $S^{**}\in\mathcal{S}$. oraz $S^*\subsetneq S^{**}$.

Zatem S^* nie jest maksymalny.



NA RAZIE:

$$\begin{array}{l} WOP \longrightarrow AC \\ LKZ \nearrow \end{array}$$

PÓŹNIEJ: $AC \equiv WOP \equiv LKZ$

TW. [LKZ] W każdej przestrzeni wektorowej istnieje baza.

UWAGA: $\mathbb{R}^3$: baza : $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

D-d. Ustalmy prz. wekt. V nad ciałem K.

Niech $X = \{ L \subseteq V : L$ jest lin. niezal $\}$.

Rozw. cz. porz. $(X, \subseteq)$.

Pok. że $(X, \subseteq)$ spełnia zał. LKZ.

Weźmy $\mathcal{L} \subseteq X$ t.że $\mathcal{L}$ jest łańcuchem.

Niech $L = \bigcup \mathcal{L}$. Musimy pok. że L jest lin. niezal.

Zał. że $\lambda_1, .., \lambda_n \in K$, $x_1, .., x_n \in L$ t.że

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0.$$

Dla każdego $i = 1..n$ znajdujemy $L_i \in \mathcal{L}$ t.że $x_i \in L_i$.

- $\{L_1, L_2, \dots, L_n\} \subseteq \mathcal{L}$; $x_i \in L_i$.

$\mathcal{L}$ jest łańc., czyli $(\mathcal{L}, \subseteq)$ jest lin. porz

- $(\{L_1, \dots, L_n\}, \subseteq)$ jest lin. porz.

w nim istnieje element najw.

Możemy zał. że jest nim L_n.

wtedy

$$L_1 \subseteq L_n, L_2 \subseteq L_n, \dots, L_{n-1} \subseteq L_n$$

zatem $x_1, \dots, x_n \in L_n$,

ALE: • $L_n \in \mathcal{L} \subseteq X$; L_n – lin. niezal.

• $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$

ZATEM: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ ■