Tw (LKZ) Każda przestrzeń wektorowa ma bazę.

(P) Rozważmy dwa ciała algebraiczne $K_1 \subseteq K_2$

(np. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$; $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$)

wtedy K_2 jest przestrzenią wektorową nad K_1.

- $(K_2, +)$ — grupa abelowa
- mamy naturalne mnożenie:

mnożenie z K_2

$\alpha \in K_1$; $x \in K_2$: mnożenie $\alpha \odot x = \alpha \cdot x$

(P) $\mathbb{R}$ jest prz. wekt. nad $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}$ ma bazę (nad $\mathbb{Q}$); czyli jest $B \subseteq \mathbb{R}$ t. że

- B jest liniowo niez. nad $\mathbb{Q}$; czyli

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q} \\ b_1, \ldots, b_n \in B \\ \lambda_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

- dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ istnieją $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$ i $b_1, \ldots, b_n \in B$ t. że

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i.$$

- Jeśli B jest taką bazą, to $|B| \geq \aleph_0$.

P-d. Zał. że $B = \{b_1, \dots, b_n\}$

$\varphi : \mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i$

wtedy φ jest "na".

ALE: $|\mathbb{Q}^n| = \aleph_0^{\,n} = \aleph_0$.

więc $|\mathbb{R}| \leq \aleph_0$. SPRZECZNOŚĆ!

- WIĘCEJ: B - baza $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q} \longrightarrow |B| > \aleph_0$

- WIĘCEJ (AC): B - baza $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $|B| = \mathfrak{c}$.

TERMINOLOGIA: bazy $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ $\equiv$ bazy Hamela.

CO WIEM: do istnienia baz Hamela jest potrzebny AC,

PRZYPOMNIENIE: LKZ $\rightarrow$ AC
WOP $\nearrow$

To pokażemy

FAKT: AC $\equiv$ LKZ $\equiv$ WOP

Później!!!

LICZBY ALGEBRAICZNE.

<u>Def</u>. Liczba $a \in \mathbb{C}$ jest liczbą algebraiczną jeśli istnieje $w(x) \in \mathbb{Q}[x]$ stopnia ≥ 1 t. że $w(a) = 0$.

(P) • $\sqrt{2}$: $\quad w(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$

$w(\sqrt{2}) = 0$

$\sqrt{2} \in ALG$

• $q \in \mathbb{Q}$, $n \geq 2$; $\quad a = \sqrt[n]{q}$; $\quad a^n = q$

$q \geq 0$ $\quad$; $a^n - q = 0$

; $w(x) = x^n - q$

$w(a) = 0$

$\sqrt[n]{q} \in ALG$.

ALG = zbiór wszystkich liczb algebraicznych.

Tw. $\boxed{|ALG| = \aleph_0}$

D-d. 1) $\mathbb{Q} \subseteq ALG$;

niech $q \in \mathbb{Q}$; rozw. $w(x) = x - q$.

wtedy $w \in \mathbb{Q}[x]$ i $w(q) = 0$.

2) $\mathbb{Q}[x] \longleftrightarrow \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{Q}^n$

$w(x) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \qquad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$

$w \leftrightarrow (a_0, a_1, \dots, a_n)$

$|\mathbb{Q}[x]| = \left|\bigcup_n \mathbb{Q}^n\right| = \aleph_0 . \qquad |\mathbb{Q}^n| = \aleph_0$

suma przel. zb. przelicz

$\mathbb{Q}^{\geq 1}[x] = \{ w \in \mathbb{Q}[x] : \deg(w) \geq 1 \} .$

OCZYWIŚCIE : $|\mathbb{Q}^{\geq 1}[x]| = \aleph_0$

- $w \in \mathbb{Q}^{\geq 1}[x]$: $r(w) = \{a \in \mathbb{C} : w(a) = 0\}$

$$\left.\begin{array}{l} \deg(w) \geq 1 \\ n = \deg(w) \end{array}\right\} \to |r(w)| \leq n$$

wn. z zasadn. tw. alg.

- $ALG = \bigcup_{w \in \mathbb{Q}^{\geq 1}[x]} r(w)$

przelicz

przel.

ZATEM: $|ALG| = \aleph_0$.

TW. ALG jest ciałem

$$\mathbb{Q} \subseteq ALG \subseteq \mathbb{C}$$

Bez dowodu.

więcej: ALG jest ciałem algebraicznym domkniętym, czyli
$w \in ALG[x]$, $\deg(w) \geq 1$; $a \in \mathbb{C}$
$w(a) = 0 \implies a \in ALG$.

KONSTRUKCJA OBIEKTÓW MATEM.

Zał. że mamy dane $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1) = \mathcal{N}$

KONSTRUKCJA $\mathbb{Z}$.

Niech $\Omega = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Na Ω definiujemy

$$(a, b) \approx (c, d) \equiv (a + d = b + c)$$

O co tu chodzi:

$$\begin{array}{c} a + d = b + c \\ \Updownarrow \\ a - b = c - d \\ \Updownarrow \\ \varphi((a, b)) = \varphi((c, d)) \end{array}$$

$\varphi((x, y)) = x - y$

• Pok. że to jest rel. równow.

$(a,b)\approx(c,d) \equiv a+d=b+c$

▷ $(a,b) \approx (a,b) \equiv (a+b = b+a) \equiv T$

▷ $(a,b) \approx (c,d) \equiv a+d = b+c$

$\Downarrow$

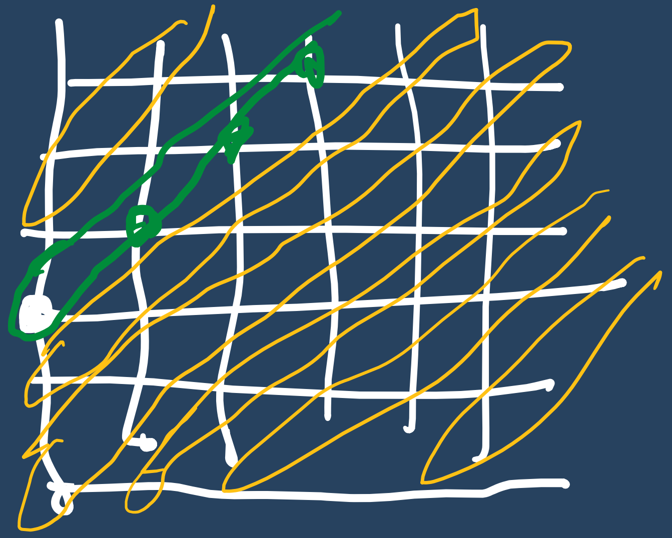
$(c,d) \approx (a,b) \equiv c+b = d+a$

▷ przech. : zadanie

• $[(2,0)] = \{(a,b) \in N \times N : (a,b) \approx (2,0)\}$

$= \{(a,b) \in \Omega : a+0 = b+2\}$

$= \{(b+2, b) : b \in \mathbb{N}\}$



$$[(0,2)] = \{(a,b)\in\Omega : (a,b)\approx(0,2)\}$$
$$= \{(a,b)\in\Omega : a+2 = b+0\}$$
$$= \{(a,a+2) : a\in\mathbb{N}\}$$

$$\Omega/\approx \; = \{[(n,0)] : n\geq 0\} \cup \{[(0,n)] : n>0\}$$

DEF. $\mathbb{Z} = \Omega/\approx$

Określamy działania: $\underbrace{[(a,b)]}_{a-b} + \underbrace{[(c,d)]}_{c-d} =$

$$= [(a+c, b+d)]$$

Zadanie: $+$ jest popr. zdefiniowane

Def. mnożenia: $\overset{a-b}{[(a,b)]} \cdot \overset{c-d}{[(c,d)]} =$

$$[(ac+bd,\, ad+bc)].$$

Zadanie: to jest poprawne.

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \Omega/\approx \ : \ n \longmapsto [(n,0)]$$

$(a-b)(c-d) = ac+bd - (ad+bc)$

- $\varphi(n+m) = [(n+m,0)]_{\sim} = [(n,0)]_{\sim} + [(m,0)]_{\sim}$

  $= \varphi(n) + \varphi(m)$

- $\varphi(n \cdot m) = [(n \cdot m, 0)]_{\sim} = [(n,0)] \cdot [(m,0)]$

  $= \varphi(n) \cdot \varphi(m)$

- $[(0,0)] + [(a,b)] = [(a,b)]$
- $[(1,0)] \cdot [(a,b)] = [(a,b)]$

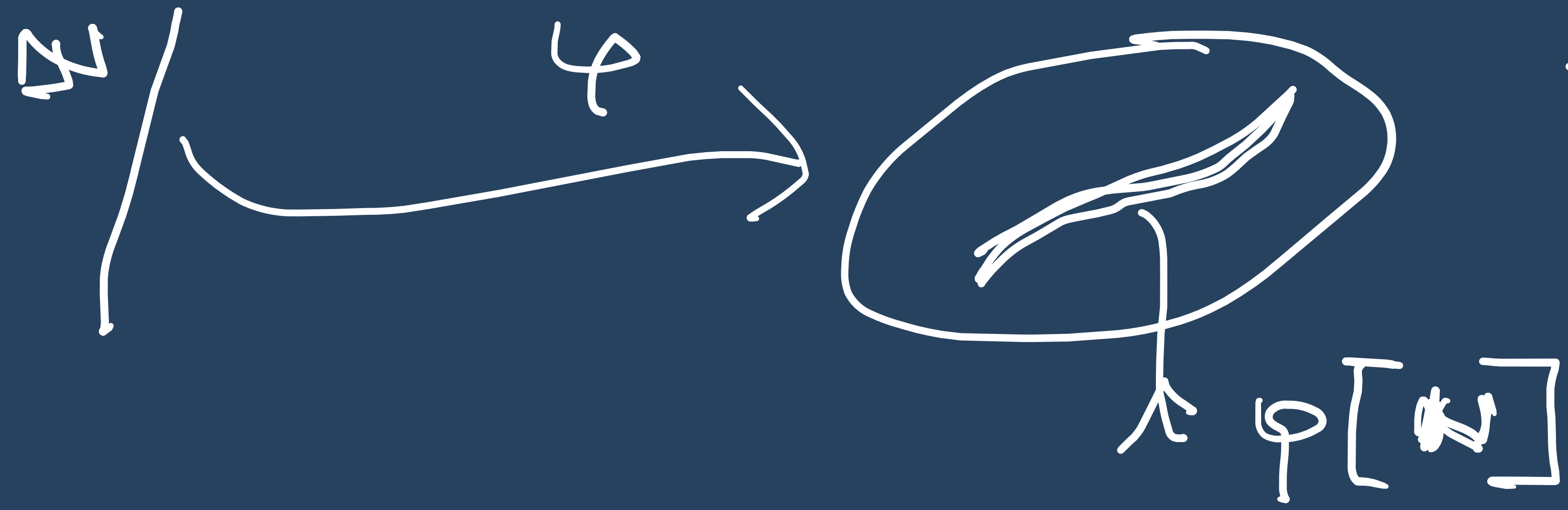
- $[(a,b)] + [(b,a)] = [(a+b,\, b+a)]$

$= [(0,0)] = \mathbf{0}$

$-[(a,b)] = [(b,a)]$

$\varphi:$

$\bar{n} = \varphi(n) = [(n,0)]$



$$\Omega/\approx \; = \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} = \{\bar{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-\bar{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$$

KONSTR. $\mathbb{Q}$.

$$\frac{2}{4} \equiv \frac{1}{2}$$

$$\Omega = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$$

$$\underset{\substack{\wr\\ \frac{l}{m}}}{(l, m)} \approx \underset{\substack{\wr\\ \frac{l'}{m'}}}{(l', m')} \equiv l \cdot m' = m \cdot l'$$

ZADANIE: $\approx$ jest rel. równoważności.

ZAD. INF. $\left\{\begin{array}{l}\text{Oprogramuj:}\\ \text{liczb wymiernych.}\end{array}\right.$

Operacje:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad+bc,\ b\cdot d)]$$

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(a\cdot c,\ b\cdot d)]$$

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+/_{\sim_\sim},\ +,\ \cdot).$$

$b \neq 0 \wedge d \neq 0$

$\Downarrow$

$b\cdot d \neq 0$

$$\varphi : \mathbb{Z} \xrightarrow{1-1} \mathbb{Q} : k \longmapsto [(k,1)]_\approx$$