Matematyka Dyskretna
Zadania

Jacek Cichoń
Katedra Podstaw Informatyki
Wydział Informatyki i Telekomunikacji Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2022

Oznaczenia

1. $[n] = \{1, \ldots, n\}$
2. $[A]^k = \{X \in P(A) : |X| = k\}$
3. współczynnik dwumianowy: $\binom{n}{k}$
4. liczby Catalana: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$
5. współczynnik multizbiorowy: $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$
6. liczby Stirlinga I rodzaju: $\left[{n \atop k}\right]$
7. liczby Stirlinga II rodzaju: $\left\{{n \atop k}\right\}$
8. dolna silnia: $x^{\underline{k}} = \prod_{j=0}^{k-1}(x-j)$
9. górna silnia: $x^{\overline{k}} = \prod_{j=0}^{k-1}(x+j)$
10. liczby Bella: $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\}$
11. liczby harmoniczne: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
12. funkcja dzeta Riemana: $\zeta(z) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^z}$

1 Zbiory

Zadanie 1

Niech A i B będą dowolnymi zbiorami skończonymi. Które z następujących zdań są prawdziwe: $[A \cup B]^2 = [A]^2 \cup [B]^2$, $[A]^2 \cup [B]^2 \subseteq [A \cup B]^2$, $[A \cap B]^2 \subseteq [A]^2 \cap [B]^2$, $[A]^2 \cap [B]^2 = [A \cap B]^2$.

Zadanie 2

Pokaż, że każdą dodatnią liczbę naturalną można przedstawić jednoznacznie jako sumę różnych potęg liczby 2. Czy potrafisz uogólnić ten fakt?

Zadanie 3

Przedstaw co najmniej dwa różne dowody tego, że $(\forall n \in \mathbb{N})(n < 2^n)$

Zadanie 4

Pokaż, że $(\forall n \geqslant 10)(2^n > n^3)$.

Zadanie 5

1. Ile jest podzbiorów n-elementowego zbioru zawierających ustalony element ?
2. Pokaż, że skończony niepusty zbiór zawiera tyle samo zbiorów o mocy parzystej co zbiorów o mocy nieparzystej.

Zadanie 6

Pokaż, że dla dowolnych liczb naturalnych a oraz n mamy $|\{k \in [n] : a|k\}| = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$.

Zadanie 7

Wyznacz moce następujących zbiorów:

1. $\{k \in [1000] : 2|k \vee 5|k\}$
2. $\{k \in [1000] : 2|k \vee 5|k \vee 7|k\}$
3. $\{k \in [1000] : 2|k \vee 5|k \vee 7|k \vee 11|k\}$

Zadanie 8

Niech $n \geqslant 3$. Ile jest surjekcji ze zbioru $[n]$ na zbiór $[3]$?

Wskazówka: Niech Z_i oznacza zbiór tych funkcji f z $[n]$ w $[3]$ takich, że $i \notin \mathrm{rng}(f)$. Stosując zasadę włączania - wyłączania wyznacz $|Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3|$.

Zadanie 9

Ile jest funkcji częściowych ze zbioru n elementowego w zbiór m elementowy?
Wskazówka: W niektórych językach programowania występuje pojęcie *undefined*.

* Zadanie 10

Niech S_n oznacza zbiór wszystkich ciągów zero-jedynkowych długości $\leqslant$ n.

1. Pokaż, że $|S_n| = 2^{n+1} - 1$
2. Wskaż bijekcję między zbiorem S_n a zbiorem $\{0,1\}^{[n+1]} \setminus \{(0,0,\ldots,0)\}$.

Wskazówka: Wykorzystaj związek skończonych binarnych ciągów z reprezentacjami binarnymi liczb naturalnych

Zadanie 11

Niech $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = 2a_n + b$. Znajdź zwartą postać wzoru na a_n.

Zadanie 12

Rozważmy następujący wariant problemu wież z Hanoi: mamy trzy pozycje A, B, C oraz n krążków ustawionych początkowo na pozycji A. Naszym celem jest przestawienie ich na pozycję C z zachowanie zasad z oryginalnego problemu z dodatkowym ograniczeniem: nie możemy przestawiać żadnego krążka bezpośrednio z pozycji A na C ani z C na A. Ile potrzebujemy przestawień?

Zadanie 13

Wyznacz moce następujących zbiorów:

1. $\{(A, B) \in P([n])^2 : A \subseteq B\}$
2. $\{(A, B, C) \in P([n])^3 : A \subseteq B \subseteq C\}$
3. $\{(A, B, C) \in P([n])^3 : A = B \cup C\}$

Zadanie 14

1. Pokaż, że $\frac{1}{2}n(n-1) = \mathrm{O}\left(n^2\right)$ oraz, że $n^2 = \mathrm{O}\left(\frac{1}{2}n(n-1)\right)$.
2. Pokaż, że $(n+1)^2 = n^2 + \mathrm{O}\left(n\right)$.

Zadanie 15

1. Podaj prostą charakteryzację zdania $f = \mathrm{O}\left(1\right)$.
2. Pokaż, że jeśli $f = \mathrm{O}\left(g\right)$ i $k \in \mathbb{R}$ to $k \cdot f = \mathrm{O}\left(g\right)$
3. Pokaż, że jeśli $f_1 = \mathrm{O}\left(g_1\right)$ i $f_2 = \mathrm{O}\left(g_2\right)$ to $f_1 \cdot f_2 = \mathrm{O}\left(g_1 \cdot g_2\right)$.
4. Pokaż, że jeśli $f_1 = \mathrm{O}\left(g_1\right)$ i $f_2 = \mathrm{O}\left(g_2\right)$ to $f_1 + f_2 = \mathrm{O}\left(\max(g_1, g_2)\right)$.

Zadanie 16

Niech $X_i = [n] \times \{i\}$.

1. Wyznacz moc zbioru $S_n = \{A \in P([n] \times [n]) : (\forall i)(A \cap X_i \neq \emptyset)\}$.
2. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{2^{n^2}}$.

2 Współczynniki dwumianowe

Zadanie 17

Oblicz 11^4. Jaki związek ma ta liczba ze współczynnikami dwumianowymi?

Zadanie 18

Znajdź wszystkie liczby naturalne a, b, c takie, że $\binom{a}{b}\binom{b}{c} = 2\binom{a}{c}$.

Zadanie 19

Pokaż, że

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} .$$

Zadanie 20

Udowodnij na dwa sposoby (algebraiczny i kombinatoryczny), że

$$\binom{n}{2} + \binom{n+1}{n} = n^2 .$$

Zadanie 21

Udowodnij na dwa sposoby (algebraiczny i kombinatoryczny), że

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} .$$

Zadanie 22

Zastosuj wzór Stirlinga

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

do wyznaczenia przybliżeń liczby $\binom{2n}{n}$ oraz liczby $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Zadanie 23

Rozważmy następującą pętlę:

```
FOR I=1 TO N DO
  FOR J=I TO N DO
    OP(I,J)
```

1. Ile razy wykonywana jest operacja OP wewnątrz tej pętli?
2. Uogólnij to zadanie na pętle głębokości 3.
3. Uogólnij to zadanie na pętle długości k i pokaż, że dla dowolnego $k \geqslant 1$ operacja OP wykonywania jest $\mathrm{O}\left(n^k\right)$ razy.

Zadanie 24

Zajmujemy się algorytmem wyliczania na wyznaczanie liczb $\binom{n}{k}$. Załóżmy, że napisany algorytm jest oparty o tożsamość Pascala $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Oszacuj złożoność obliczeniową napisanego programu.

Zadanie 25

Skorzystaj ze wzoru dwumianowego oraz ze wzoru $(x^k)' = kx^{k-1}$ do pokazania, że

$$\sum_k k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1} .$$

Zadanie 26

Podaj dowody algebraiczne i kombinatoryczne następujących tożsamości:

1. $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$
2. $\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$.

Zadanie 27

Załóżmy, że p jest liczbą pierwszą oraz $1 \leqslant k < p$

1. Pokaż, że $p|\binom{p}{k}$.
2. Pokaż, korzystając z pierwszej części zadania, że jeśli p jest liczbą pierwszą oraz $a, b \in \mathbb{N}$ to $(a+b)^p \equiv (a^p + b^p) \mod p$.
3. Wyprowadź z poprzedniego zadania „Małe Twierdzenie Fermata": jeśli p jest liczbą pierwszą, to $a^p \equiv a \mod p$ dla dowolnej liczby naturalnej a.

Zadanie 28

1. Pokaż, że $x^{\overline{k}} = (-1)^k(-x)^{\underline{k}}$.
2. Pokaż, że $x^{\underline{k}} = (-1)^k(k-x-1)^{\underline{k}}$.
3. Oblicz $n^{\underline{n}}$, $(-1)^{\underline{k}}$, $1^{\overline{n}}$.
4. Oblicz $\binom{-1}{k}$ negując górny indeks.
5. Pokaż, że $\left(\frac{1}{2}\right)^{\underline{n+1}} = (-1)^{n+1}\frac{n!}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}$.
6. Wyznacz $\binom{1/2}{k+1}$.

Zadanie 29

Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $n > 0$. Pokaż, że

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} ,$$

Wskazówka: Podziel obie strony równości przez $n!$ i porównaj to co otrzymasz z tożsamością Vandermonda.

Zadanie 30

Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $n > 0$. Pokaż, że

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}} .$$

Wskazówka: skorzystaj z poprzednich zadań.

Zadanie 31

Znajdź zwarte postacie następujących sum:

1. $\sum_k \binom{n}{k} k^2$.
   Wskazówka: Wskazówka: skorzystaj z tożsamości $\sum_k \binom{n}{k} k = n \cdot 2^{n-1}$.
2. $\sum_k \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$
3. $\sum_k \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}$
4. $\sum_k \binom{n}{k}^2$.

   Wskazówka: skorzystaj z tożsamości $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n$.
5. $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k}^2$.

   Wskazówka: skorzystaj z tego, że $(1-x^2)^n = (1-x)^n(1+x)^n$.

** Zadanie 32

Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych $1 \leqslant k \leqslant n$ mamy

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqslant \binom{n}{k} \leqslant \left(\frac{ne}{k}\right)^k .$$

Wskazówka: Pierwsza nierówność jest "łatwa". Przed udowodnieniem drugiej udowodnij najpierw, że $(1 + \frac{1}{k})^k \leqslant e$ dla wszystkich $k \geqslant 1$ a potem możesz spróbować przeprowadzić indukcję względem k.

Zadanie 33

Rozważmy równanie

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 .$$

1. Ile ma rozwiązań to równanie w liczbach naturalnych?
2. Skorzystaj z zasady włączania-wyłączania do wyznaczenia liczby takich rozwiązań tego równania, że $x_1 \leqslant 4$, $x_2 \leqslant 4$ i $x_3 \leqslant 4$.
3. Spróbuj jakoś rozsądnie uogólnić pierwszą część tego zadania.

Zadanie 34

Wyprowadź ze wzoru

$$\sum_{a=0}^{n} \binom{a}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{1}$$

wzór

$$\sum_{a=0}^{n} \binom{a+k}{a} = \binom{n+k+1}{n} \tag{2}$$

1. Pokaż, że we wzorze (2) k może być dowolną liczbą zespoloną.
2. Niech $S_n^a = \sum_{k=1}^n k^a$. Zastosuj wzór (2) do wyprowadzenia zwartych wzorów na S_n^1, S_n^2 i S_n^3.

Zadanie 35

Wyprowadź wzór

$$\sum_{k \leqslant a} \binom{n}{k} (-1)^k = (-1)^a \binom{n-1}{a}$$

ze wzoru (2) dwukrotnie stosując podwójną negację.

Zadanie 36

Rozwiń w szereg potęgowy następujące funkcje

1. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$
2. $g(x) = \frac{1}{(1-2x)^3}$
3. $h(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$

oraz znajdź ich promienie zbieżności.

Zadanie 37

Ustalmy liczby naturalne $a > 0$, b i n. Rozważmy zbiór M wszystkich (monotonicznych) **ostro rosnących** odwzorowań ze zbioru $[a+b]$ w zbiór $[n+1]$.

1. Pokaż, że $|M| = \binom{n+1}{a+b}$
2. Niech $M_i = \{f \in M : f(a) = i\}$. Wyznacz moce $|M_i|$ dla wszystkich $i \in [n+1]$.
3. Wyprowadź z tego zwarty wzór na sumę $\sum_k \binom{k}{a}\binom{n-k}{b}$.

Zadanie 38

Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami n-krotnie różniczkowalnymi w punkcie x. Przez $h^{(k)}(x)$ oznaczamy k-tą pochodną hunkcji h w punkcie x (przy czym $h^{(0)}(x) = h(x)$). Pokaż, że

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \ .$$

Zadanie 39

1. Pokaż, że $\sum\limits_{a+b+c=n} \binom{n}{a,b,c} = 3^n$.
2. Pokaż, że $\sum\limits_{a+b+c=n} \binom{n}{a,b,c}(-1)^b = 1$

Zadanie 40

Załóżmy, że a, b są liczbami naturalnymi takimi, że $b \geqslant a + 2$. Niech $c = a + 1$ oraz $d = b - 1$. Zauważ, że $c \leqslant d$. Pokaż, że $c! \cdot d! < a! \cdot b!$.

1. Który czynnik w rozwinięciu $(x_1 + x_2 + \ + x_k)^k$ ma największy współczynnik?
2. Załóżmy, że $n < k$. Jaki jest największy wpół czynniki w rozwinięciu $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$?
3. Załóżmy, że $n = rk$, gdzie $r > 1$ jest liczbą naturalną. Jaki jest największy współczynniki w rozwinięciu $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$?

Zadanie 41

1. Ile anagramów ma słowo ABRAKADABRA?
2. Ile ma słowo LOKOMOTYWA takich anagramów w których litery O nie występują obok siebie?

Zadanie 42

Załóżmy że $2n$ osób siedzi przy okrągłym stole. Na ile sposobów mogą wszyscy jednocześnie uścisnąć dłonie z drugą osobą przy stole w taki sposób, aby żadne ramiona się nie skrzyżowały?

Zadanie 43

Mamy do dyspozycji n par nawiasów (). Chcemy z nich zbudować "poprawne" wyrażenie, gdzie przez "poprawne" rozumiemy takie wyrażenie w którym każdy nawias otwierający ma odpowiadający mu nawias zamykający. Na przykład, (), ()(), (()()), ((())()) są wyrażeniami poprawnymi zaś)(, ((()(nie są wyrażeniami poprawnymi. Dla $n = 0$ mamy jedno takie wyrażenie (ciąg pusty), dla $n = 1$ mamy jedno wyrażenie (), zaś dla $n =$ may dwa takie wyrażenia: (()) i ()(). Ile jest poprawnych w tym sensie wyrażeń zbudowanych z n par nawiasów?

Zadanie 44

Niech P będzie zbiorem wszystkich $\{\uparrow, \rightarrow\}$ - ścieżek w siatce $\{0, \ldots, n\} \times \{0, \ldots, n\}$. Dla $a \in \{0, \ldots, n\}$ definiujemy $P_a = \{X \in P : (\exists i)(X[i] = (a, n - a)\}$.

1. Pokaż, że $P = \bigcup_a P_a$
2. Wyznacz $|P_a|$.
3. Wyprowadź z tego pewną znaną Ci już tożsamość dwumianową dla $\binom{2n}{n}$.

Zadanie 45

Rozważamy $\{\uparrow, \rightarrow\}$ - ścieżki w siatce $\{0, \ldots, n\} \times \{0, \ldots, n\}$ zaczynające się w punkcie $(0, 0)$ i kończące się w punkcie (n, n). Niech $\mathcal{P} = (r_1, \ldots, r_{2n})$ będzie ścieżką opisaną za pomocą sekwencji strzałek. Indeks i nazywamy szczytem $\mathcal{P}$ jeśli $(r_i, r_{i+1}) = (\uparrow, \rightarrow)$. Niech $k \in \{0, \ldots, n\}$.

1. Ile jest ścieżek o dokładnie k szczytach?
2. Zsumuj otrzymane liczby. Jaką otrzymasz tożsamość?

Zadanie 46

Niech P będzie zbiorem wszystkich $\{\uparrow, \rightarrow\}$ - ścieżek w siatce $\{0, \ldots, n\} \times \{0, \ldots, m\}$. Ustalmy $k \in \{1, \ldots, n\}$. Dla $b \in \{0, \ldots, m\}$ definiujemy $P_b = \{X \in P : (\exists i)(X[i] = (k - 1, b) \land X[i + 1] = (k, b))\}$.

1. Pokaż, że $P = \bigcup_b P_b$
2. Wyznacz $|P_b|$.
3. Wyprowadź z tego tożsamość dwumianową na $\binom{n+m}{n}$.
4. Jaki ma związek to zadanie z zadaniem 37?

Zadanie 47

Znajdź bijekcję pomiędzy drzewami binarnymi o n liściach a ścieżkami Dyke'a długości $2(n - 1)$.

Zadanie 48

Udowodnij następującą (znaną) tożsamość, na którą samodzielnie natrafiła wasza koleżanka Zofia Wiora:

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{a} \binom{n - i - 1}{a - i} 2^k$$

Wskazówka: Niech $S(n, a) = \sum_{k=0}^{a} \binom{n}{k}$; zacznij od pokazania, że $S(n+1, a+1) = \binom{n}{a+1} + 2S(n, a)$.

Zadanie 49

Udowodnij algebraicznie następujące własności współczynników multizbiorowych oraz pokaz ich interpretację kombinatoryczną:

1. $\left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\left(\!\binom{0}{k}\!\right) = 0$ dla $k > 0$.
2. $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n}{k-1}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right)$

3 Proste metody szacowania

Zadanie 50

Na wykładzie pokazaliśmy, że jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją niemalejącą oraz, że $a, b \in \mathbb{N}$ to

$$f(a) + \int_a^b f(x)dx \leqslant \sum_{k=a}^{b} f(k) \leqslant \int_a^b f(x)dx + f(b)$$

Korzystając z tego faktu pokaż, że jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją nierosnącą oraz, że $a, b \in \mathbb{N}$. Pokaż, że

$$f(b) + \int_a^b f(x)dx \leqslant \sum_{k=a}^{b} f(k) \leqslant \int_a^b f(x)dx + f(a)$$

Zadanie 51

Zastosuj poprzednie zadanie do znalezienia oszacowań dolnych i górnych sumy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$, dla $a > 1$

Zadanie 52

Pokaż, bez stosowania indukcji matematycznej, że

1. $\sum_{k=1}^{n} H_k = (n + 1) (H_{n+1} - 1)$
2. $\sum_{k=1}^{n} kH_k = \frac{1}{4}n(n + 1) (2H_{n+1} - 1)$.
3. $\sum_{k=2}^{n} \frac{H_k}{k(k-1)} = 2 - \frac{H_{n+1}}{n} - \frac{1}{n+1}$.
4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = H_{2n} - H_n$

Zadanie 53

Oblicz całkę $\int\limits_0^1 \frac{1-x^{n-1}}{1-x} dx$. Pokaż następnie, że

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \binom{n}{k} .$$

Zadanie 54

Wyznacz sumy $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ i $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$ za pomocą liczb harmonicznych i zbadaj ich asymptotykę.

Zadanie 55

Oblicz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{10^n}$.

Wskazówka: Może przydać Ci się rozwinięcie funkcji $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ w szereg Taylora w punkcie $x = 0$:

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k \ .$$

Przemnóż następnie ten szereg przez szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

4 Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Zadanie 56

Ustalmy kombinatoryczną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \Pr)$.

1. Pokaż, że dla dowolnych zdarzeń $A, B \subseteq \Omega$ mamy

$$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B] \ .$$

   Podaj uogólnienie tego wzoru na trzy zbiory.
2. Niech $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Pokaż że $E(X - E(X)) = 0$.
3. Niech $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Określamy funkcję $f(t) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) - t)^2$. Dla jakiej wartości parametru t funkcja f osiąga najmniejszą wartość?

Zadanie 57

Rozważamy kombinatoryczną przestrzeń probabilistyczną $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$.

1. Niech $A = \{(a, b) \in \Omega : 3|(a+b)\}$, $B = \{(a, b) \in \Omega : 3|(a \cdot b)\}$. Wyznacz $\Pr[A]$ oraz $\Pr[B]$.
2. Niech $S : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $S((a, b)) = a + b$. Oblicz $E(L)$.
3. Niech $M((a, b)) = a \cdot b$. Oblicz $E(M)$.

Zadanie 58

Rozważamy kombinatoryczną przestrzeń probabilistyczną $\Omega = P(\{1, \ldots, n\})^2$.

1. Wyznacz prawdopodobieństwo zdarzenia $C_1 = \{(A, B) \in \Omega : A \subseteq B\}$.
2. Wyznacz prawdopodobieństwo zdarzenia $C_2 = \{(A, B) \in \Omega : A = B\}$.
3. Wyznacz prawdopodobieństwo zdarzenia $C_3 = \{(A, B) \in \Omega : A \cap B = \emptyset\}$.
4. Niech $L((A, B)) = |A \cap B|$. Wyznacz wartość oczekiwaną $E(L)$.

Zadanie 59

Zbiór S_n permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$ traktujemy jako kombinatoryczną przestrzeń probabilistyczną. Niech $D_n = \{\pi \in S_n : (\forall i)(\pi(i) \neq i\}$ będzie zbiorem nieporządków na S_n. Wyznacz $\Pr[S_n]$ oraz, oczywiście, oblicz $\lim_{n\to\infty} \Pr[D_n]$.

5 Liczby Stirlinga

Zadanie 60

Rzędem elementu g w grupie G nazywamy najmniejszą liczbę $k \geqslant 1$ taką, że $g^k = e$ (lub ∞, jeśli takiego k nie ma). Liczbę tę oznaczamy przez $\mathrm{rank}(g)$. Załóżmy, że permutacja $\pi \in S_n$ rozkłada się k cykli o długościach $a_1, \ldots, a_k$. Pokaż, że

$$\mathrm{rank}(\pi) = \mathrm{NWW}(a_1, \ldots, a_k)\ .$$

Zadanie 61

Skorzystaj, na przykład, z serwisu
https://www.w3schools.com/python/numpy/numpy_random_permutation.asp
do wygenerowania losowej permutacji zbioru $\{1, \ldots, 30\}$. Następnie rozłóż otrzymaną permutację na cykle i wyznacz jej znak oraz rząd.

Zadanie 62

Wyznacz liczby $\left[{3 \atop k}\right]$ oraz $\left[{4 \atop k}\right]$.

Zadanie 63

1. Pokaż, że $\left[{n \atop n-2}\right] = \frac{1}{4}\binom{n}{3}(3n-1)$ dla $n \geqslant 2$.
2. Pokaż, że $\left[{n \atop n-3}\right] = \binom{n}{2}\binom{n}{4}$ dla $n \geqslant 3$.

Zadanie 64

Znajdź rozsądną formułę na liczby $\left\{{n \atop 3}\right\}$.

Zadanie 65

Pokaż, że $\left\{{n \atop n-3}\right\} = \frac{1}{48}n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2$.

Zadanie 66

Pokaż, że $\binom{n}{k-1} \leqslant \left\{{n \atop k}\right\} \leqslant \binom{n-1}{k-1}k^{n-k}$

Zadanie 67

Liczbami Bella nazywamy liczby $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\}$. Pokaż, że $B_n < n!$ dla $n \geqslant 3$.

Zadanie 68

Pokaż, że dla $n \geqslant 2$ mamy $n! < \left\{{2n \atop n}\right\} < (2n)!$

6 Liczby Fibonacciego

Zadanie 69

Które liczby Fibonacciego są parzyste? Odpowiedź, oczywiście, uzasadnij.

Zadanie 70

Oblicz $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

Zadanie 71

Oblicz $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{2^n}$.

Zadanie 72

Wyznacz następujące sumy

1. $\sum_{k=0}^{n} F_k$
2. $\sum_{k=0}^{n} F_{2k}$
3. $\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1}$

* Zadanie 73

Pokaż, że dla każdego n mamy $\mathrm{nwd}(F_n, F_{n+1}) = 1$.

* Zadanie 74

Pokaż, że $\mathrm{nwd}(F_n, F_m) = F_{\mathrm{nwd}(n,m)}$.
Wskazówka: Skorzystaj z poprzedniego zadania

Zadanie 75

Pokaż, że $F_n | F_{kn}$ dla wszystkich $n, k \geqslant 1$.

Zadanie 76

Liczbami Lukas'a nazywamy elementy ciągu $(L_n)_{n\geqslant 0}$ zdefiniowanego następująco: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ oraz $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$. Wyraź liczby Lukas'a za pomocą liczb Fibonacciego.

Zadanie 77

Liczbami Pellego nazywamy elementy ciągu $(P_n)_{n\geqslant 0}$ zdefiniowanego następująco: $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ oraz $P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$. Wyznacz formułę podobną do formuły Binet'a na liczbę P_n.

7 Funkcje tworzące i klasy kombinatoryczne

Zadanie 78

Mówimy, że klasy kombinatoryczne $\mathcal{A} = (A, |\cdot|_A)$ oraz $\mathcal{B} = (B, |\cdot|_B)$ są izomorficzne jeśli istnieje bijekcja $f : A \to B$ taka, że $(\forall a \in A)(|a|_A = |f(a)|_B)$.

1. Pokaż, że jeśli klasy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ sa izomorficzne, to $\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)$.
2. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?

Zadanie 79

Znajdź zwarte postacie funkcji tworzących następujących ciągów $a_n = 1$, $b_n = 2^n$, $c_n = 2^n + 3^n$, $d_n = n$.

Zadanie 80

Wyznacz ciągi, których funkcje tworzące wyrażają się wzorami: ciągów

1. $f(x) = \frac{1}{1+x}$,
2. $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$,
3. $h(x) = \frac{x^2}{1-3x}$.

Zadanie 81

Rozważamy ciąg (a_n) zadany równaniem rekurencyjnym

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + n \ .$$

1. Wyznacz funkcję tworzącą tego ciągu.
2. Znajdź zwarty wzór na n-ty wyraz tego ciągu

Zadanie 82

Niech $\mathcal{P} = (P(\{1, 2, \ldots, n\}), |\cdot|)$, gdzie $|A|$ oznacza moc zbioru A. Wyznacz funkcję tworzącą $\mathcal{P}(x)$.

Zadanie 83

Niech L będzie zbiorem wszystkich skończonych ciągów zbudowanych z liter $\{A, G, C, T\}$. Niech $\mathcal{L} = (L, |\cdot|)$, gdzie $|\sigma| =$ długość ciągu σ.

1. Wyznacz $\mathcal{L}(x)$.
2. Wyznacz $[x^n](\mathcal{L} \times \mathcal{L})(x)$ i podaj interpretację kombinatoryczną otrzymanego wyniku.

Zadanie 84

Niech $\mathcal{N}_\varepsilon = (\{\varepsilon\}, |\cdot|)$, gdzie $|\varepsilon| = 0$. Pokaż, że każda klasa kombinatoryczna $\mathcal{A}$ jest izomorficzna z klasą $\mathcal{A} \times \mathcal{N}_\varepsilon$.

Zadanie 85

Niech $\mathcal{A}$ będzie klasą kombinatoryczną. Jakiej klasie odpowiada funkcja tworząca $\frac{1}{2}(\mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(-x))$?.

Zadanie 86

Dlaczego przy konstrukcji klasy $\mathrm{Mult}(\mathcal{A})$ zakładaliśmy, że w klasie kombinatorycznej $\mathcal{A}$ nie ma elementów rozmiaru 0?

Zadanie 87

Rozwiń funkcje $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ oraz $g(x) = \frac{x^2}{(1-x)^3}$ w szeregi potęgowe w punkcie $x = 0$. Podaj interpretację kombinatoryczną otrzymanych wyników.
Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru na "'górną negację" dla współczynników dwumianowych.

Zadanie 88

Niech $\mathcal{A} = (\{a, b\}, |\cdot|)$, gdzie $|a| = 1$ i $|b| = 2$. Wyznacz $\mathrm{MULT}(\mathcal{A})(x)$ oraz znajdź wzór na $[x^n]\mathrm{MULT}(\mathcal{A})(x)$.

Zadanie 89

Korzystając ze wzoru

$$\mathrm{CYCLE}(\mathcal{A})(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\varphi(n)}{n} \ln \frac{1}{1 - \mathcal{A}(x^n)}$$

odpowiedź na następujące pytania:

1. Ile różnych cykli długości 11 można utworzyć z dwóch różnych elementów?
2. Ile różnych cykli długości 11 można utworzyć z trzech różnych elementów?
3. Ile różnych cykli długości 10 można utworzyć z dwóch różnych elementów?

Zadanie 90

Zastosuj wzór na $\mathrm{CYCLE}(\mathcal{A})(x)$ do klasy kombinatorycznej złożonej z jednego elementu o wadze 1.

1. Wyjaśnij zaobserwowane zjawisko.
2. Podaj możliwie prosty (kilku linijkowy) dowód zaobserwowanego faktu.

Zadanie 91

Ile jest $\{0, 1, 2\}$ – drzew o n wierzchołkach (czyli drzew, w których każdy węzeł ma 0, 1 lub 2 potomków)?

8 Grafy

Zadanie 92

Pokaż, że w dowolnym grafie liczba wierzchołków o rzędzie nieparzystym jest parzysta.

Zadanie 93

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym. Przez $\overline{G}$ oznaczamy graf $(V, [V]^2 \setminus E)$. Pokaż, że graf G jest spójny lub graf $\overline{G}$ jest spójny.

Zadanie 94

Niech $\mathcal{G} = (V, E)$ będzie grafem prostym takim, że $|E| > \binom{|V|-1}{2}$. Pokaż, że $\mathcal{G}$ jest grafem spójny.

Zadanie 95

Pokaż, że w każdym grafie prostym o co najmniej dwóch wierzchołkach są dwa wierzchołki o takim samym rzędzie.

Zadanie 96

Pokaż, że graf prosty jest grafem dwudzielnym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy cykl w tym grafie ma długość parzystą.

Zadanie 97

Niech $\delta(\mathcal{G}) = \min\{\deg_{\mathcal{G}}(v) : v \in V(\mathcal{G})\}$. Pokaż, że jeśli $\mathcal{G}$ jest skończonym grafem prostym oraz $\delta(\mathcal{G}) \geqslant 2$ to w grafie $\mathcal{G}$ istnieje cykl długości co najmniej $\delta(\mathcal{G}) + 1$.

Wskazówka: Rozważ ścieżkę $(v_0, \ldots v_k)$ o maksymalnej długości. Pokaż najpierw, że zbiór sąsiadów wierzchołka v_0 zawiera się w zbiorze $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Zadanie 98

Wyznacz wszystkie (z dokładnością do izomorfizmu) wszystkie drzewa n elementowe dla $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Zadanie 99

Pokaż, że każde drzewo o co najmniej dwóch wierzchołkach musi zawierać co najmniej dwa wierzchołki o rzędzie 2.

Zadanie 100

Pokaż, że graf prosty jest drzewem wtedy i tylko wtedy pomiędzy dowolnym dwoma różnymi wierzchołkami istnieje **dokładnie** jedna ścieżka.

Zadanie 101

Rozważmy dowolny algorytm wyszukujący za pomocą porównań element najmniejszy w podanym n elementowym ciągu liczb rzeczywistych. Pokaż, że algorytm ten musi wykonać co najmniej $n - 1$ porównań.

Wskazówka: Skorzystaj z tego, że jeśli graf $\mathcal{G}$ jest spójny, to $|E(\mathcal{G})| \geqslant |V(\mathcal{G})| - 1$.

Jacek Cichoń