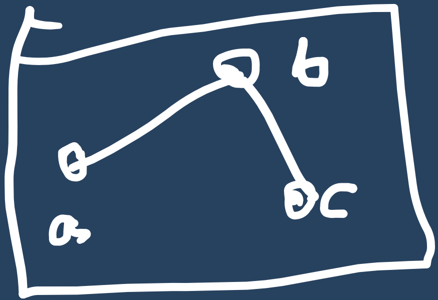
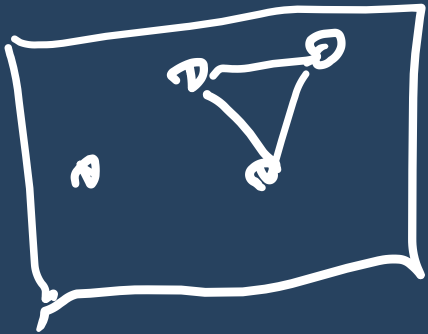
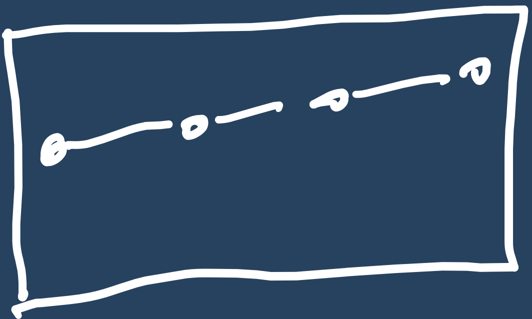
Grafy







BAWIMY SIĘ GRAFAMI SKOŃCZ.

Def. Grafem prostym nazywamy parę $G=(V,E)$, gdzie $V \neq \emptyset$

zaś $E \subseteq [V]^2 \quad \left(= \{\{a,b\} : a,b \in V \wedge a \neq b\}\right)$

P $\left(\{a,b,c\}, \{\{a,b\}, \{b,c\}\}\right)$

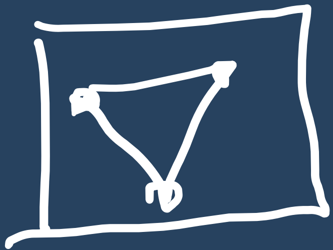
- V ← zbiór wierzch.
- E – zbiór krawędzi

P

$E_n = (\{1,\dots,n\}, \emptyset)$ ← empty

$K_n = (\{1,\dots,n\}, [\{1,\dots,n\}]^2)$

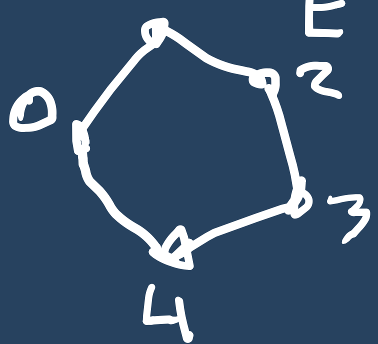
pełny

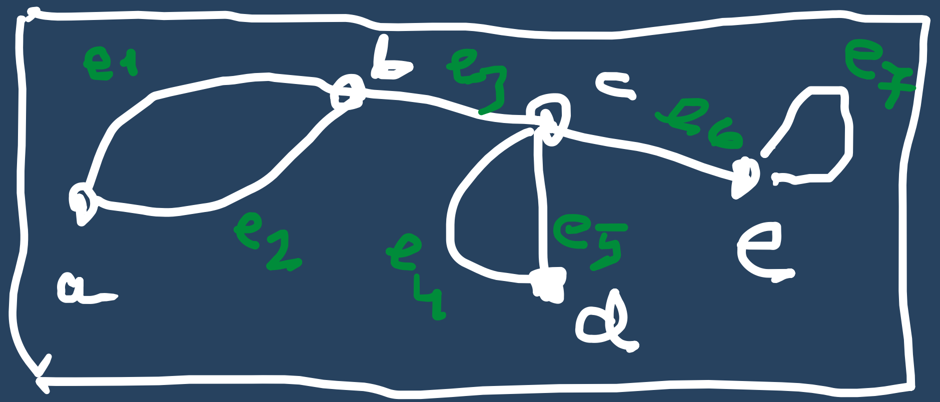


$L_n = (\{1,\dots,n\}, \{\{i,i+1\} : 1 \le i < n\})$

$C_n = (\{0,\dots,n-1\}, E)$

$E = \{\{i,(i+1) \bmod n\} : i = 0,\dots,n-1\}$



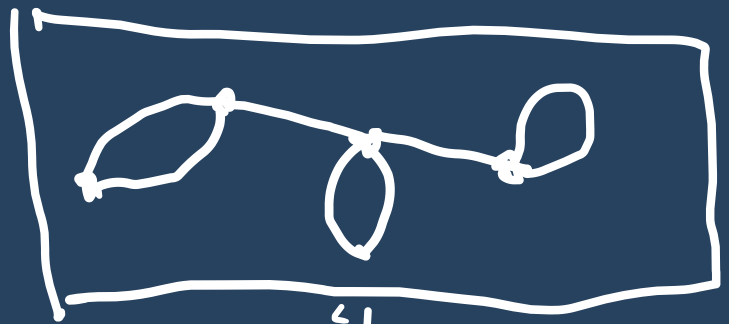


$$\varphi(e_1) = \{a, b\}$$
$$\varphi(e_2) = \{a, b\}$$
kraw. wielokrotne;

$$\varphi(e_7) = \{e\}$$
pętla

Def. Grafem nazywamy trójkę $G = (V, E, \varphi)$, gdzie $V \neq \emptyset$

raz! $\varphi : E \longrightarrow [V]^1 \cup [V]^2$



ogólny

$\Rightarrow$

prosty

UWAGA: Ustalamy $V = \{1, \dots, n\}$.

Ile jest różnych grafów prostych o zb. wierz. V?

$$E \subseteq [V]^2 \qquad |[V]^2| = \binom{n}{2}$$

Możliwych E mamy $2^{\binom{n}{2}}$.

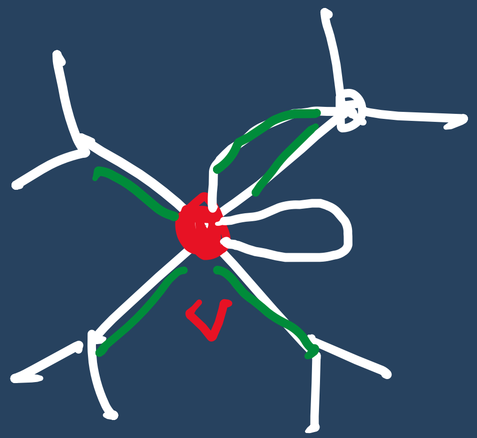
np. $n = 11$; $\quad 2^{\binom{11}{2}} = 2^{\frac{11 \cdot 10}{2}} = 2^{55} \sim 10^{16,5}$.

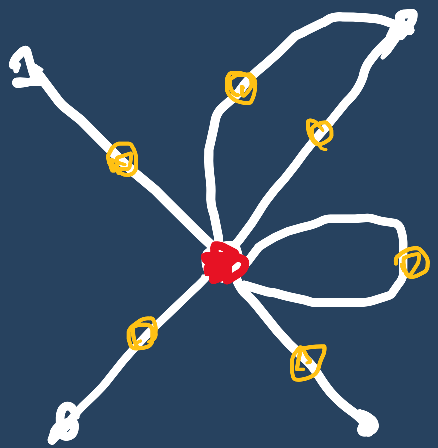
Ile jest 11-elem. grup? GAP: 1

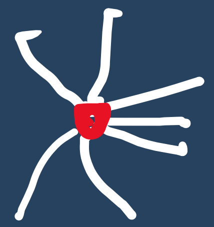
Def. Niech (V, E, φ) będzie grafem, $v \in V$. Wtedy

$$\deg(v) = \left|\{e \in E : |\varphi(e)| = 2 \wedge v \in \varphi(e)\}\right| + 2 \cdot \left|\{e \in E : \varphi(e) = \{v\}\}\right|$$

rząd wierzchołka





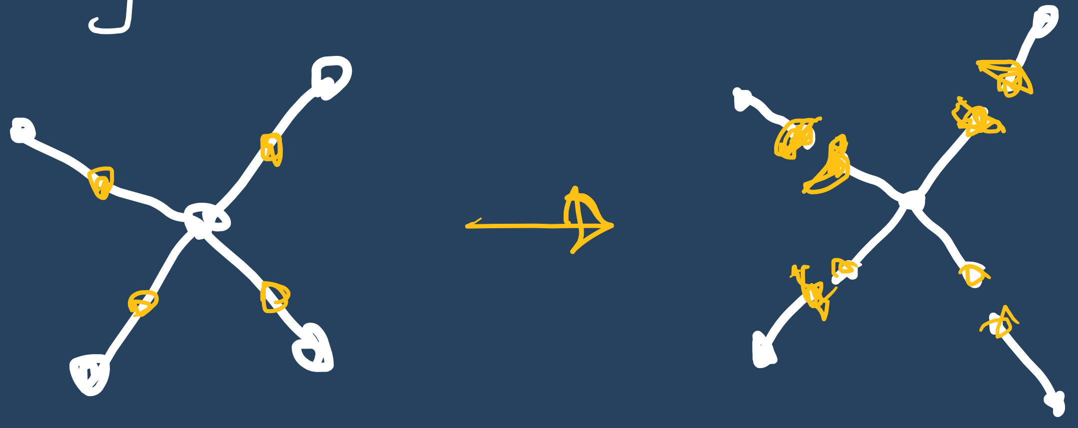


$\deg(v) = 7.$

Tw. (Euler) Dla dowolnego grafu mamy

$$\boxed{\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|}$$

Intuicja:



D-d. $\displaystyle\sum_{v\in V} \deg(v) = (*)$

$$E_1 = \{e\in E : |\varphi(e)| = 1\}$$
$$E_2 = \{e\in E : |\varphi(e)| = 2\}$$

$$= \sum_{v\in V}\left(\sum_{e\in E_2} [\![v\in\varphi(e)]\!] + 2\cdot\sum_{e\in E_1} [\![\varphi(e) = \{v\}]\!]\right)$$

$$= \sum_{e\in E_2}\sum_{v\in V} [\![v\in\varphi(e)]\!] + 2\sum_{e\in E_1}\sum_{v\in V} [\![\varphi(e) = \{v\}]\!]$$

$$= \sum_{e\in E_2} 2 + 2\cdot\sum_{e\in E_1} 1 = 2\cdot|E_2| + 2\cdot|E_1| = 2\cdot|E|$$

$\blacksquare$

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = 2\cdot|E|$$ ← wł. globalna

wł. lokalna

wn. $\boxed{2 \,\Big|\, \big|\{v\in V : \neg\, 2 \mid \deg(v)\}\big|}$

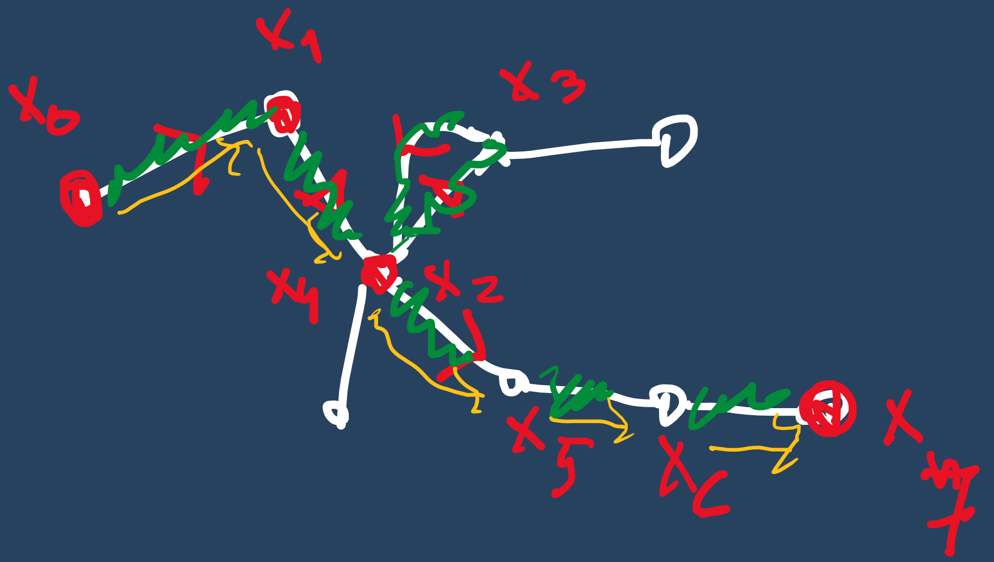
<u>Zadanie</u>. W każd. grafie prostym (skończ) są dwa wierzch. o tym samym rzędzie.

Def. Ścieżką w grafie (V, E, φ) nazywamy ciąg

$$x_0 e_0 x_1 e_2 \ldots e_{n-1} x_n$$

t. że $\varphi(e_i) = \{x_i, x_{i+1}\}$ dla $0 \leq i < n$.

dł. ścieżki $\equiv$ liczba krawędzi



x_0-x_n ścieżka

Jeśli jest u-v ścieżka, to jest również taka ścieżka

$$\underbrace{u = x_0 e_0 x_1 e_1 \dots e_{k-1} x_k = v}_{u\text{-}v \text{ droga}}$$

t. że

$$0 \leq i < j \longrightarrow x_i \neq x_j.$$

Ustalamy $G=(V,E,\varphi)$,

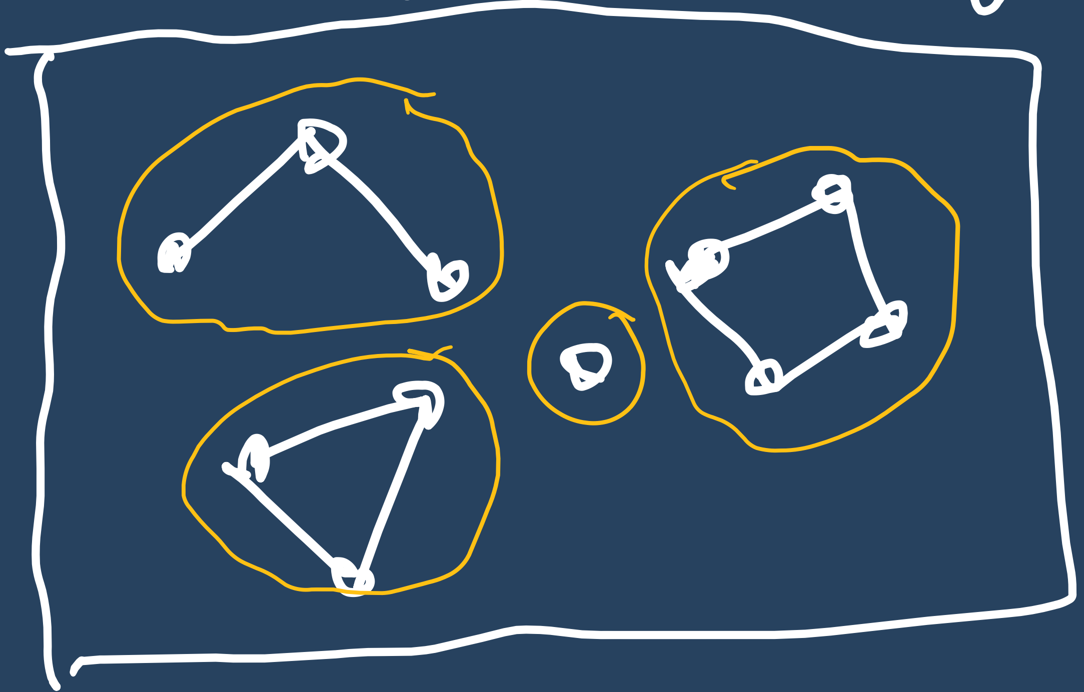
na V określamy relację

$$u \sim v \equiv \exists \text{ } u\text{-}v \text{ ścieżka}$$

- $u \sim u$
- $u \sim v \to v \sim u$.
- $u \sim v \wedge v \sim z \to u \sim z$ || konkatenacja ścieżek

W $\boxed{\sim \text{ jest. rel. równ}}$

Klasy abstrakcji $\sim$: składowe



Def. G jest spójny

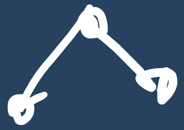
$\Updownarrow$

$|V/\sim| = 1$

Uwaga: $(V, E, \varphi) \rightsquigarrow (V^*, E^*)$

G

$\rightsquigarrow$



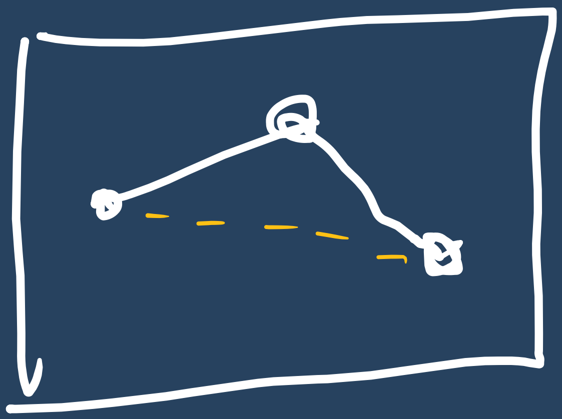
G^*

G jest spójny

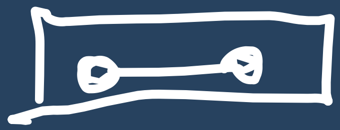
$\Updownarrow$

G^* jest spójny.

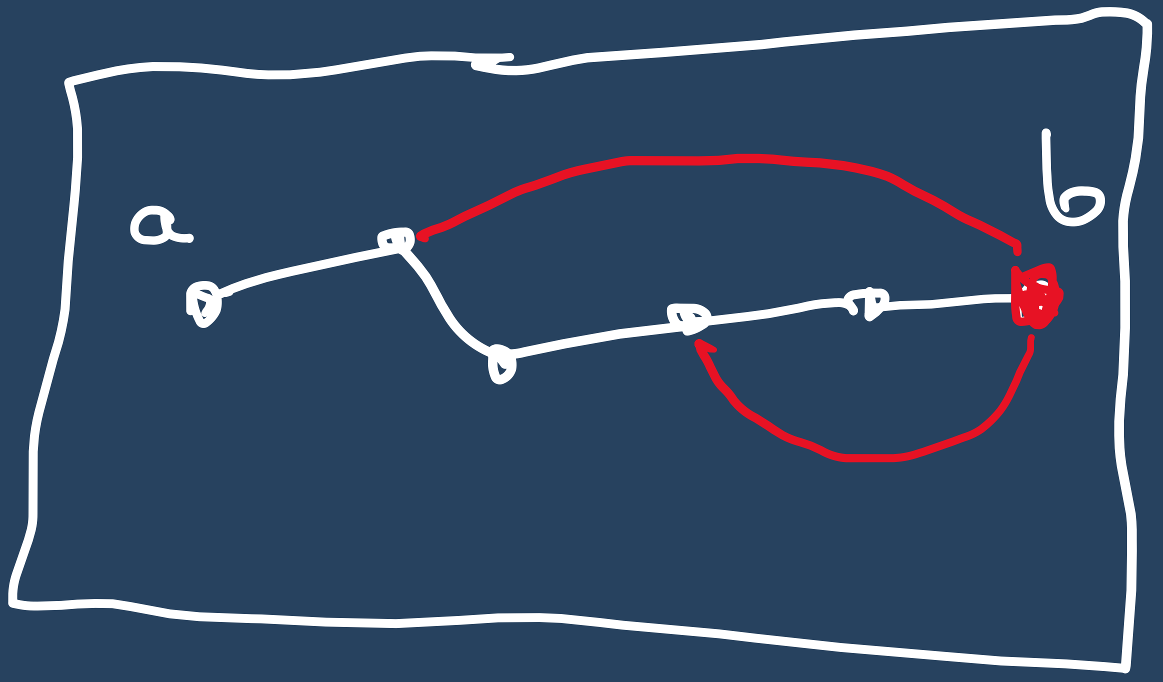
Tw. Zał. że (V, E) jest spójny. Wtedy $|E| \geq |V| - 1$.



D-d. Ind. po $|V|$.

- $|V| = 1$: 
- $|V| = 2$: 

Zał. że dla grafów t. że $|V| = n-1$ jest OK.
Zał. że $|V| = n$.

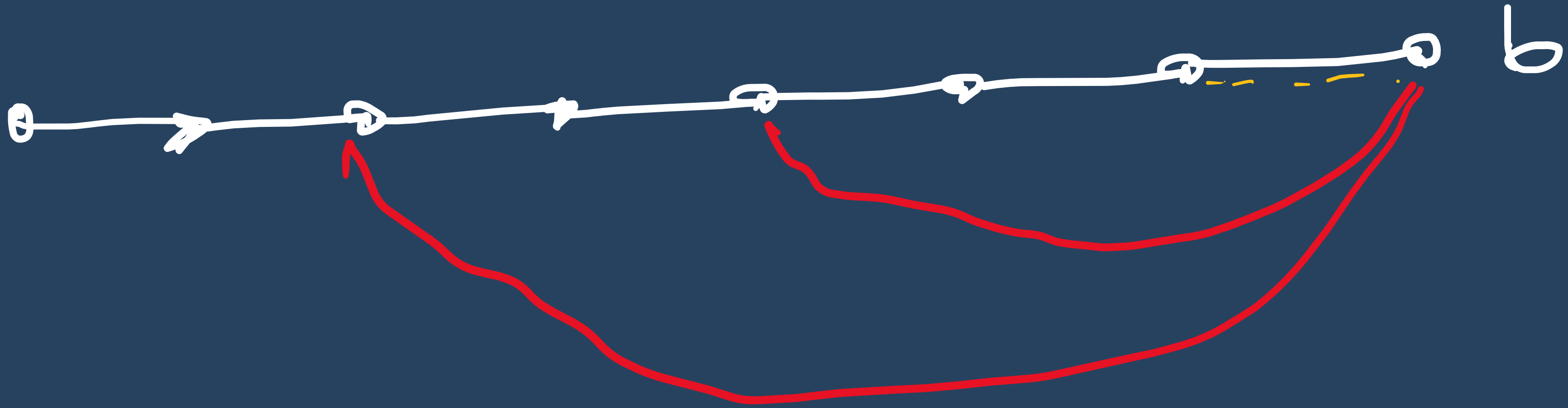


Ustalmy $a \in V$

Szukamy najdłuższej drogi zaczynającej się w a.

Koniec oznaczmy przez b.

$(\forall x \in V)\ (\{b, x\} \in E \to x$ należy do ścieżki $)$

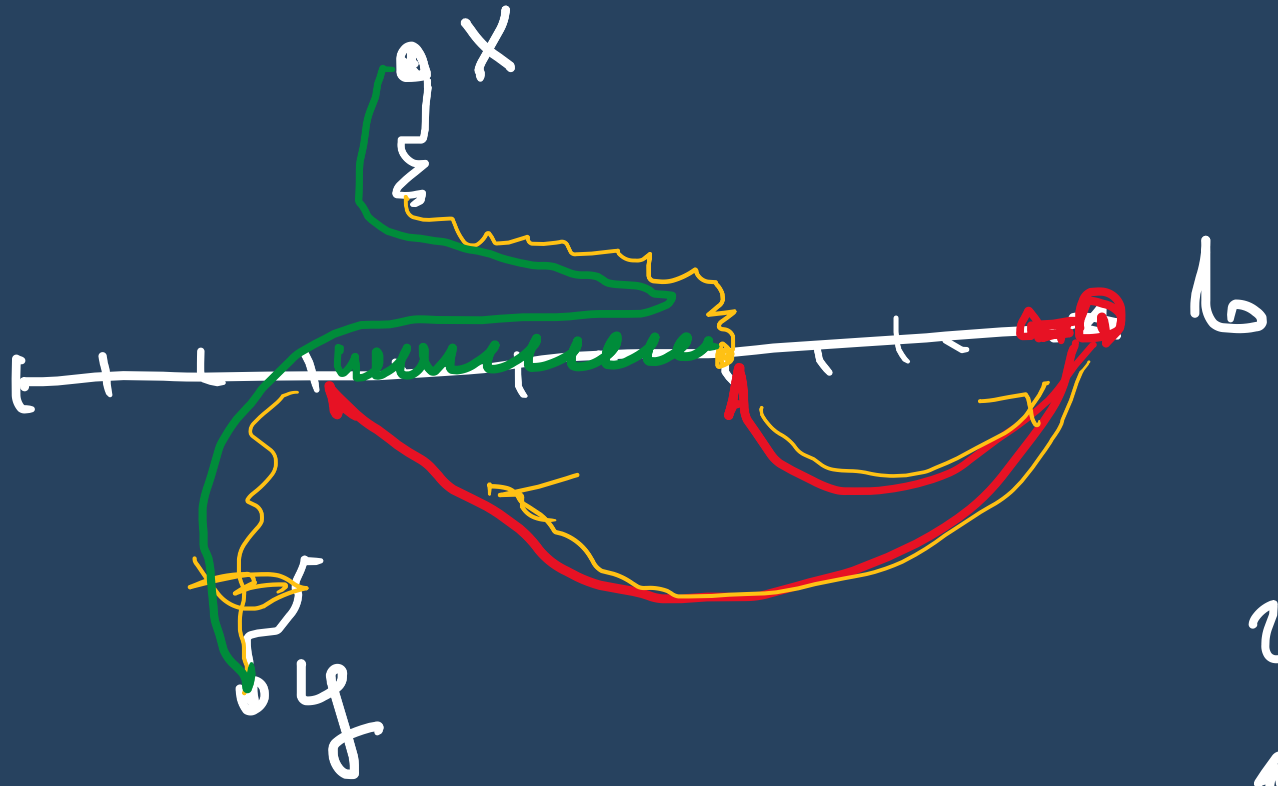


Patrzymy na $(V \setminus \{b\}, \tilde{E})$

$$\tilde{E} = E \setminus \{\{x,y\} \in E : b \in \{x,y\}\}$$

CLAIM: on jest spójny!!!

(będziemy więc mogli zastosować zał. indukcyjne)



$x, y \in V \setminus \{b\}$

w $(V \setminus \{b\}, \tilde{E})$

jeśli x-y ścieżka

zał. że ona zahacza

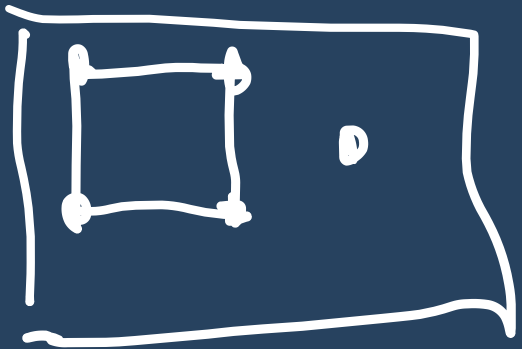
o b. Mogę ją zast.

przez ścieżkę bez b.

$(V\setminus\{b\}, \hat{E})$ spójne :

$$|\hat{E}| \geq |V\setminus\{b\}| - 1 = |V| - 2$$

$|E\setminus\hat{E}| \geq 1$ $\qquad$ $|E| \geq |V| - 2 + 1 = |V| - 1$.



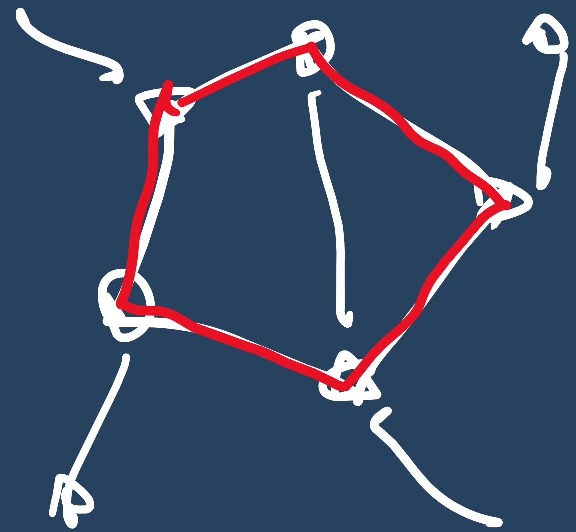
$|V| = 5$ $\quad$ Warunek $|E| = |V| - 1$

$|E| = 4$ $\quad$ nie implikuje spójności

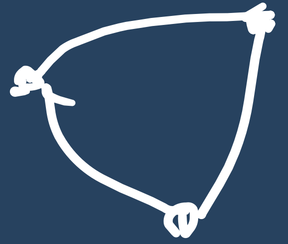
<u>Def</u>. Cykl w grafie:

ciąg $x_0 x_1 x_2 \ldots, x_k$ $(\in V)$

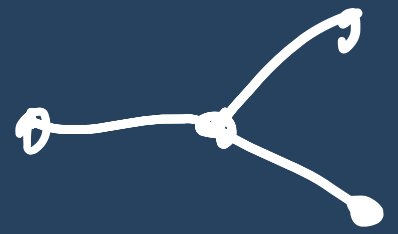
t. że
1) $x_0 = x_k$)
2) $\{x_i, x_{i+1}\} \in E$
3) $0 \leq i < j < k \longrightarrow x_i \neq x_j$
4) krawędzie są różne

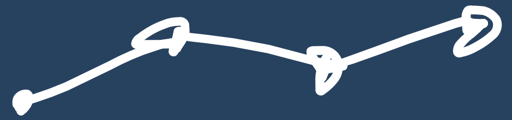


Uwaga: w grafie prostym cykl jest dług ≥ 3



DEF. Graf prosty jest drzewem jeśli jest SPÓJNY i nie ma CYKLI





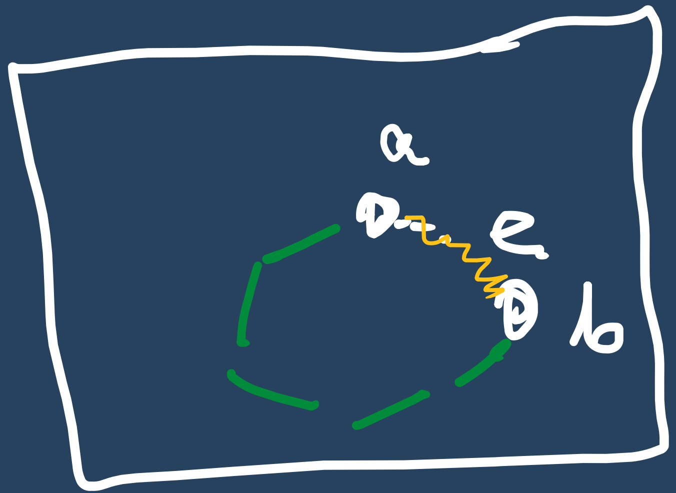
Tw

1) spójność + acykliczność (≡ drzewo)

2) spójny + przestaje być spójny po usunięciu dowolnej krawędzi

3) spójny + $|E| = |V| - 1$

(1) $\rightarrow$ (2)

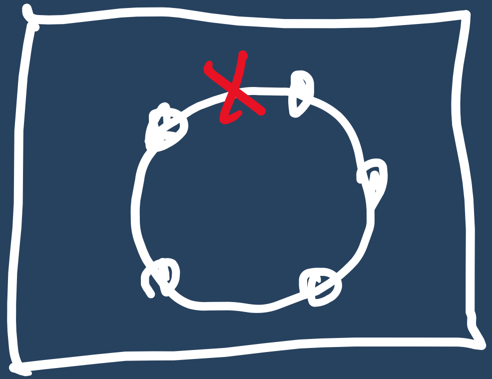


tzn. że $(V, E \setminus \{e\})$ byłby spójny.

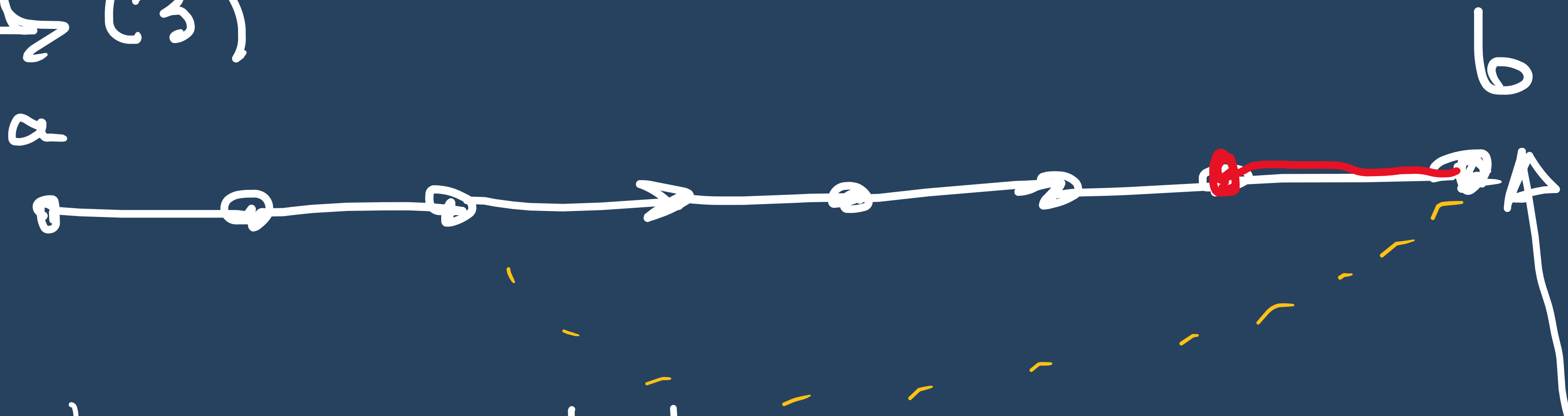
mamy ścieżkę w od a do b.

otrzymujemy cykl.

(2) $\rightarrow$ (1)



(1) $\to$ (3)



max dług

Indukcja po $|V|$

$\deg(b) = 1$

$\blacksquare$