Egzamin z LiSF
termin pierwszy - 06.02.2023

Zadanie 1. Niech A, B i C będą dowolnymi zbiorami.

Wariant a. Niech $X = (A \setminus B) \setminus C$ oraz $Y = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Wariant b. Niech $X = (A \setminus B) \setminus C$ oraz $Y = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Które ze zdań:

(1) $X = Y$; (2) $X \subseteq Y$; (3) $Y \subseteq X$; (4) żadne z powyższych

jest prawdziwe?
Rozwiązanie zadania 1a. Mamy $X = (A \setminus B) \setminus C = A \cap B^c \cap C^c$ oraz $Y = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \cap C^c) \cap (B \cap C^c)^c = (A \cap C^c) \cap (B^c \cup C) = (A \cap C^c \cap B^c) \cup (A \cap C^c \cap C) = (A \cap C^c \cap B^c)$, **zatem** $X = Y$.
Rozwiązanie zadania 1b. W wyniku mojego błędu edycyjnego oba warianty są identyczne.

Zadanie 2. Pokaż, że dla dowolnych trzech zbiorów A, B i C mamy:

Wariant a. $(A \cup C = B \cup C) \leftrightarrow (A \triangle B \subseteq C)$.

Wariant b. $(A \cup C) \triangle (B \cup C) = (A \triangle B) \setminus C$.

Rozwiązanie zadania 2a. $(\rightarrow)$ Załóżmy, że $A \cup C = B \cup C$. Jeśli $x \in A \setminus B$, to $x \in A \cup C$, więc $x \in B \cup C$, ale $x \notin B$, więc $x \in C$. Podobnie pokazujemy, że jeśli $x \in B \setminus A$ to $x \in C$.

$(\leftarrow)$Załóżmy, że $A \triangle B \subseteq C$. Rozważmy $x \in A \cup C$. (C1) jeśli $x \in B$ to $x \in B \cup C$ (C2) jeśli $x \notin B$ to $x \in A \setminus B$, więc $x \in A \triangle B$, a więc $x \in C$, a zatem $x \in B \cup C$. W obu przypadkach mamy $x \in B \cup C$. W podobny sposób pokazujemy, że jeśli $x \in B \cup C$ to $x \in A \cup C$.
Rozwiązanie zadania 2b.

$$\begin{gathered}
(A \cup C) \triangle (B \cup C) = \\
((A \cup C) \cap (B \cup C)^c) \cup ((A \cup C)^c \cap (B \cup C)) = \\
((A \cup C) \cap B^c \cap C^c) \cup ((A^c \cap C^c \cap (B \cup C)) = \\
(A \cap B^c \cap C^c) \cup (C \cap B^c \cap C^c) \cup ((A^c \cap C^c \cap B) \cup (A^c \cap C^c \cap C)) = \\
(A \cap B^c \cap C^c) \cup ((A^c \cap C^c \cap B) = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) = \\
((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) \cap C^c = (A \triangle B) \setminus C \ .
\end{gathered}$$

Zadanie 3. Wyznacz moc zbioru

Wariant a. $\{A \in P(\mathbb{R}) : |A \triangle [0,1]| \leqslant \aleph_0\}$

Wariant b. $\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (\exists n)(\forall k \geqslant n)(f(k+2) = f(k) + 2f(k+1))\}$

Rozwiązanie zadania 3a. Niech $\mathcal{A} = \{A \in P(\mathbb{R}) : |A \triangle [0,1]| \leqslant \aleph_0\}$. Niech $\mathcal{C} = \{C \subseteq \mathbb{R} : |C| \leqslant \aleph_0\}$. Wiemy, że $|\mathcal{C}| = \mathfrak{c}$. Mamy

$$\begin{gathered}
\mathcal{A} = \{A \in P(\mathbb{R}) : A \triangle [0,1] \in \mathcal{C}\} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \{A \in P(\mathbb{R}) : A \triangle [0,1] = C\} = \\
\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \{A \in P(\mathbb{R}) : A = C \triangle [0,1]\} = \{C \triangle [0,1] : C \in \mathcal{C}\},
\end{gathered}$$

więc funkcja $f(C) = C \triangle [0,1]$ jest bijekcją między $\mathcal{C}$ i $\mathcal{A}$. **Zatem** $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$.
Rozwiązanie zadania 3b. Niech $\mathcal{F} = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (\exists n)(\forall k \geqslant n)(f(k+2) = f(k) + 2f(k+1))\}$, $\mathcal{F}_n = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (\forall k \geqslant n)(f(k+2) = f(k) + 2f(k+1))\}$ oraz $\mathcal{F}_{n;a,b} = \{f \in \mathcal{F}_n : f(n) = a \wedge f(n+1) = b\}$. Zauważmy, że $|\mathcal{F}_{n;a,b}| = 1$ oraz $\mathcal{F}_n = \bigcup_{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mathcal{F}_{n;a,b}$, więc zbiory $\mathcal{F}_n$ są przeliczalne. Lecz $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$, więc zbiór $\mathcal{F}$ jest również przeliczalny. Zbiór $\mathcal{F}$ jest nieskończony, bo, np., zbiory $\mathcal{F}_{0;0,k}$ są różne dla różnych k. **Zatem** $|\mathcal{F}| = \aleph_0$.

Zadanie 4. Na zbiorze Ω określamy relację równoważności $\sim$ wzorem

Wariant a. $\Omega = \mathbb{R}^2$; $(x,y) \sim (x',y') \leftrightarrow (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$

Wariant b. $\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0\}$; $(n \sim m) \leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N})(2^k | n \leftrightarrow 2^k | m)$

1. Opisz $\Omega/\sim$ i wyznacz moc tego zbioru.
2. Podaj przykład selektora rodziny $\Omega/\sim$.
3. Wyznacz moc zbioru wszystkich selektorów rodziny $\Omega/\sim$

Rozwiązanie zadania 4a. Niech $\pi(x) = x - \lfloor x \rfloor$. Wtedy $((x,y) \sim (x',y')) \leftrightarrow (\pi(x), \pi(y)) = (\pi(x'), \pi(y'))$.
(1) Dla $(a,b) \in [0,1)^2$ kładziemy $C_{a,b} = \{(a+k, b+l) : k,l \in \mathbb{Z}\}$. Każda liczba rzeczywista x jest postaci $x = \pi(x) + k$ dla pewnej liczby całkowitej k. Z tego wynika, że $\mathbb{R}^2/\sim = \{C_{a,b} : a,b \in [0,1)^2\}$. Zatem $|\mathbb{R}^2/\sim| = |[0,1) \times [0,1)| = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.
(2) Przykładem selektora jest zbiór $[0,1)^2$.
(3) Każdy selektor $\mathbb{R}^2/\sim$ jest postaci $S_f = \{(a,b) + f((a,b)) : (a,b) \in [0,1)^2\}$ dla pewnej funkcji $f : [0,1)^2 \to \mathbb{Z}^2$. Zatem moc zbioru wszystkich selektorów jest równa

$$|(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^{[0,1)\times[0,1)}| = (\aleph_0 \cdot \aleph_0)^{\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}} = \aleph_0^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}} \ .$$

Rozwiązanie zadania 4b. Niech $\pi_2(n) = \max\{k : 2^k | n\}$. Wtedy $(n \sim m) \leftrightarrow (\pi_2(n) = \pi_2(m))$. Zatem $[2^k]_\sim = \{2^k(2a+1) : a \in \mathbb{N}\}$.
(1)Każdą dodatnią liczbę naturalną możemy zapisać w postaci $2^k(2a+1)$ dla pewnego $a \in \mathbb{N}$, zatem $\Omega/\sim = \{[2^k]_\sim : k \geqslant 0\}$ skąd $|\Omega/\sim| = \aleph_0$.
(2)Zbiór $\{2^k : k \geqslant 0\}$ jest selektorem $\Omega/\sim$.
(3)Każdy selektor $\Omega/\sim$ jest postaci $S_f = \{2^k(2f(k)+1) : k \in \mathbb{N}\}$ dla pewnej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. **Zatem zbiór wszystkich selektorów** $\Omega/\sim$ **jest mocy** $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Zadanie 5. Liczby kardynalne $\beth_n$ (dla $n \in \mathbb{N}$) definiujemy następująco: $\beth_0 = \omega$, $\beth_{n+1} = |P(\beth_n)|$. Liczbę $\beth_\omega$ definiujemy następująco: dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ wybieramy zbiór X_n taki, że $|X_n| = \beth_n$; zakładamy, że zbiory X_n są parami rozłączne i kładziemy

$$\beth_\omega = |\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n| \ .$$

Oblicz $(\beth_\omega)^{\aleph_0}$.
Możesz skorzystać z następujących własności rozważanych liczb: $\beth_n \cdot \beth_m = \beth_n + \beth_m = \max\{\beth_n, \beth_m\}$.
Rozwiązanie zadania 5. Pokażemy najpierw, że $\beth_0 \cdot \beth_\omega = \beth_\omega$. Rzeczywiście

$$\beth_0 \cdot \beth_\omega = |X_0 \times \bigcup_n X_n| = |\bigcup_n (X_0 \times X_n)| = |\bigcup_n X_n| = \beth_\omega \ .$$

Z powyższej równości wynika, że

$$(\beth_\omega)^{\aleph_0} \leqslant (2^{\beth_\omega})^{\beth_0} = 2^{\beth_\omega \cdot \beth_0} = 2^{\beth_\omega} \ .$$

Niech $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Dla $A \subseteq Y$ określamy funkcję $f_A : \mathbb{N} \to \prod_n P(X_n)$ określoną wzorem $f_A(n) = A \cap X_n$. Zauważmy, że jeśli $A \neq B$ to $f_A \neq f_B$, zatem funkcja $F(A) = f_A$ jest injekcją z $P(Y)$ w $\prod_n P(X_n)$. Ale $|P(X_n)| = |X_{n+1}|$, więc $|\prod_n P(X_n)| = |\prod_n X_{n+1}| \leqslant |Y^{\aleph_0}|$ Więc $|P(Y)| = 2^{\beth_\omega} \leqslant \beth_\omega^{\aleph_0}$.
Zatem $(\beth_\omega)^{\aleph_0} = 2^{\beth_\omega}$.