# Wstęp do Kombinatoryki Analitycznej
Lista zadań

Jacek Cichoń
WIT, PWr, 2023/24

## 1 Wstęp

**Zadanie 1** — Wyprowadź ze wzoru dwumianowego $(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ wzór

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} .$$

Wskazówka: Skorzystaj z operatora $[x^k]$ do uproszenia obliczeń.

**Zadanie 2** — Wyprowadź ze wzoru

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{a_1+\ldots+a_k=n \\ a_1\geqslant 0,\ldots,a_k\geqslant 0}} \binom{n}{a_1 a_2 \ldots a_k} x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k}$$

wzór

$$\binom{n+1}{a_1 \ldots a_k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{a_1 \ldots (a_i - 1) \ldots a_k} .$$

dla $a_1 + \ldots + a_k = n+1$, $a_1 \geqslant 0$, ..., $a_k \geqslant 0$.

**Zadanie 3** — Ile składników występuje w sumie

$$\sum_{\substack{a_1+\ldots+a_k=n \\ a_1\geqslant 0,\ldots,a_k\geqslant 0}} \binom{n}{a_1 a_2 \ldots a_k} x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k} \ ?$$

**Zadanie 4** — Niech $(x_{i,j})_{i=1,\ldots n, j=1,\ldots m}$ będą elementami dowolnego pierścienia.

1. Pokaż, że
$$\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = \sum_{f \in [m]^{[n]}} \prod_{i=1}^{n} x_{i,f(i)} .$$

2. Zapisz udowodnioną tożsamość dla $n = 2$ w bardziej czytelnej postaci.

**Zadanie 5** — Niech $\{A_1, \ldots, A_n\}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $\Omega$. Niech $d(x) = |\{i \in [n] : x \in A_i\}|$. Pokaż, że

$$\sum_{i,j=1}^{n} |A_i \cap A_j| = \sum_{x \in \Omega} d^2(x) .$$

Wskazówka: Oto propozycja początku dowodu:

$$\sum_{i,j=1}^{n} |A_i \cap A_j| = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\omega \in \Omega} \|\omega \in A_i \cap A_j\| = \ldots$$

**Zadanie 6** — Niech $N = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$, gdzie $p_i$ są parami różnymi liczbami pierwszymi oraz $e_i \geqslant 1$. Skorzystaj z Zasady Włączania - Wyłączania do pokazanie, że

$$\phi(N) = N \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) ,$$

gdzie $\phi$ oznacza funkcję phi Eulera.
Wskazówka: Zauważ, że dla $x \in \{1, \ldots, N\}$ mamy $NDW(x, N) > 1 \longleftrightarrow (\exists i \in \{1, \ldots, n\}(p_i | x)$. Skorzystać pewnie będziesz musiał ze wzoru

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{T \in [n]^k} \prod_{i \in T} x_i ,$$

gdzie przyjmujemy, że $\prod_{i \in \emptyset} x_i = 1$.

**Zadanie 7** — Niech $e_k^{(n)}$ oznacza liczbę permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$ o dokładnie $k$ punktach stałych.

1. Korzystając z symbolicznej wersji Zasady Włączania - Wyłączania $\mathcal{E}(x) = \mathcal{N}(x - 1)$ wyznacz liczby $e_k^{(n)}$.
2. Dla ustalonego $k$ oblicz
$$\lim_{n \to \infty} \frac{e_k^{(n)}}{n!} .$$

**Zadanie 8** — **("Nierówności Bonferroniego")** Niech $\{A_1, \ldots, A_n\}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $\Omega$. Dla $1 \leqslant l \leqslant n$ definiujemy

$$S_l = \sum_{k=1}^{l} (-1)^{k+1} \sum_{T \in [n]^k} |A_T| ,$$

gdzie $A_T = \bigcap_{i \in T} A_i$.

1. Pokaż, że jeśli $2l + 1 \leqslant n$, to $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| \leqslant S_{2l+1}$.
2. Pokaż, że jeśli $2l \leqslant n$, to $S_{2n} \leqslant |A_1 \cup \ldots \cup A_n|$.

Wskazówka: Zapisz $S_l$ w postaci

$$S_l = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{k=1}^{l} \sum_{T \in [n]^k} \|\omega \in A_T\| (-1)^{k+1}$$

Wprowadź oznaczenie $I(\omega) = |\{i \in [n] : \omega \in A_i\}|$ i rozważ oddzielnie przypadek $I(\omega) = 0$ oraz $I(\omega) > 0$. Przydać Ci się może tożsamość $\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^l \binom{n-1}{l}$.

**Zadanie 9** — **(lab)** Zaimplementuj algorytm Fisher-Yates generowania losowych permutacji (zgodnie z rozkładem jednostajnym).

1. Zbadaj średnią liczbę permutacji bez stałych punktów
2. Zbadaj średnią liczbę permutacji z jednym punktem stałym
3. Zbadaj średnią liczbę cykli na które rozkłada się losowa permutacja zbioru $\{1, \ldots, n\}$

**Zadanie 10** — **(lab)** Zaimplementuj metodę generowania losowych ciągów elementów ze zbioru $\{a, b\}$ oraz metodę sprawdzania czy dany ciąg $p = x_1 \ldots x_k$ jest podciągiem ciągu $\sigma$ (czyli, czy istnieją ciągi $\alpha, \beta$ takie, że $\sigma = \alpha \| p \| \beta$, gdzie $\|$ oznacza konkatenację ciągów). Niech $n$ będzie liczbą naturalną $\leqslant 50$.

1. Ile jest ciągów długości $n$ zawierających wzór $aaa$?
2. Ile jest ciągów długości $n$ zawierających wzór $abb$?
3. Jaka jest średnia liczba wystąpień wzorca $aaa$?

## 2 Szeregi potęgowe

**Zadanie 11** — Niech $q > 0$ i $f_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n$. Wyznacz promień zbieżności szeregu potęgowego $f_q$ oraz znajdź formułę analityczną na $f_q$ w jego obszarze zbieżności.

**Zadanie 12** — Niech $q > 0$ i $g_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nq^n x^n$. Wyznacz promień zbieżności szeregu potęgowego $g_q$ oraz znajdź formułę analityczną na $g_q$ w jego obszarze zbieżności.

**Zadanie 13** — Niech $f(x) = \frac{1}{1-x}$ oraz niech $c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Rozwiń funkcję $f$ w szereg potęgowy o środku w punkcie $c$
2. Wyznacz odcinek zbieżności otrzymanego rozwinięcia.

**Zadanie 14** — Rozważmy szereg potęgowy $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ o promieniu zbieżności $0 < R < \infty$. Rozważmy funkcję $g$ zadaną wzorem $g(x) = f(Rx)$.

1. Dla jaki $x$ funkcja $g$ jest określona.
2. Rozwiń funkcję $g$ w szereg potęgowy i wyznacz jego promień zbieżności.

**Zadanie 15** — Załóżmy, że $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz $a \neq b$. Niech

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)} \ .$$

1. Rozłóż funkcję $f$ na ułamki proste.
2. Przedstaw funkcję $f$ za pomocą otrzymanego rozłożenia jako szereg potęgowy $\sum_{n \geqslant 0} c_n x^n$ i znajdź jawną formułę na współczynniki $c_n$.
3. Załóż, że $|a| < |b|$. Wyznacz promień zbieżności szeregu $\sum_{n \geqslant 0} c_n x^n$.
4. Załóż, że $a > 0$ i $b = -a$. Uprość otrzymany wzór na współczynnik $c_n$ i wyznacz promień zbieżności szeregu $\sum_{n \geqslant 0} c_n x^n$ w tym przypadku. Czy wzór na $c_n$ w tym przypadku można było prościej wyprowadzić?

**Zadanie 16** — Załóżmy, że szereg potęgowy $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ ma promień zbieżności większy od zera oraz, że $a_0 \neq 0$. Niech $g(x) = \sum_{n \geqslant 0} b_n x^n$ będzie formalną odwrotnością $f$ (czyli $f(x)g(x) = 1$). Pokaż, że $g$ ma dodatni promień zbieżności.
Wskazówka: Możesz założyć, że $a_0 = 1$. Zdefiniuj pomocniczą funkcję $h(x) = \sum_{n \geqslant 1} |a_n||x|^n$ i pokaż, że jest $\delta > 0$ taka, że $h(x) < 1$ dla $|x| < \delta$. Wywnioskuj z tego, że dla $|x| < \delta$ mamy $f(x) \neq 0$. Następnie pokaż indukcyjnie, że $|b_n| < (\frac{1}{\delta})^n$.

**Zadanie 17** — Załóżmy, że $R > 0$, $S > 0$,

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n \text{ dla } |x| < R, \quad g(x) = \sum_{n \geqslant 0} b_n x^n \text{ dla } |x| < S$$

oraz $b_0 \neq 0$. Pokaż, że istnieją ciąg $(c_n)_{n \geqslant 0}$ oraz $T > 0$ takie, że

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n \geqslant 0} c_n x^n \text{ dla } |x| < T \ .$$

**Zadanie 18** — Niech $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ będzie formalnym szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności równym 0 takim, że $a_0 \neq 0$. Niech $g(x) = \sum_{n \geqslant 0} b_n x^n$ będzie formalną odwrotnością $f$ (czyli $f(x) \cdot g(x) = 1$. Pokaż, że promień zbieżności szeregu $g$ jest również równy zeru.

## 3 Funkcje tworzące

**Zadanie 19** — Rozważmy ciąg $(a_n)_{n \geqslant 0}$ określony ze pomocą rekursji $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$.

1. Znajdź zwartą formułę na $a_n$ korzystając z funkcji tworzących.
2. Wyznacz promień zbieżności otrzymanego szeregu potęgowego

Rozważmy ciąg $(b_n)_{n\geqslant 0}$ określony za pomocą rekursji $b_0 = \alpha$, $b_1 = \beta$, $b_{n+1} = b_{n+1} + 2b_n$.

3. Jaki jest związek funkcji tworzącej ciągu $(b_n)$ z funkcją tworzącą ciągu $(a_n)$?
4. Wyznacz zwartą formułę na element $b_n$ za pomocą zwartej formuły dla $a_n$

**Zadanie 20** — Wyznacz w pierścieniu liczb zespolonych $Z[i] = \{a + b \cdot i : a, b \in \mathbb{Z}\}$ z działaniami odziedziczonym z liczb zespolonych elementy odwracalne.

**Zadanie 21** — Niech $K$ będzie dowolnym ciałem. Pokaż, w pierścieniu szeregów formalnych

$$K[z] = (\{\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n : (\forall n)(a_n \in K)\}, +, \cdot, 0, 1)$$

zbiór elementów odwracalnych to

$$\{\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \in K[z] : a_0 \neq 0\} .$$

**Zadanie 22** — Niech $A(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ będzie zwykłą funkcją tworzącą. Załóżmy, że funkcja ta potraktowana jako szereg potęgowy ma promień zbieżności $R > 0$. Niech $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ dla $|x| < R$. Jak z funkcji $f$ możesz odtworzyć liczby $a_n$ ?

**Zadanie 23** — Niech $A(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}[x]$ będzie wykładniczą funkcją tworzącą. Załóżmy, że szereg ten potraktowany jako szereg potęgowy w sensie analizy matematycznej ma promień zbieżności $R > 0$. Niech $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{x^n}{n!}$ dla $|x| < R$. Jak z funkcji $f$ możesz odtworzyć liczby $a_n$ ?

**Zadanie 24** — Wyznacz zwarte postacie zwykłych oraz wykładniczych funkcji tworzących dla ciągów $a_n = n$ oraz $b_n = n^2$.

**Zadanie 25** — Ustalmy $k > 0$. Rozważmy przestrzeń liniową $\mathbb{R}_k[x]$ nad ciałem $\mathbb{R}$ wielomianów stopnia co najwyżej $k$ o wyrazach wymiernych .

1. Jaki jest wymiar przestrzeni $\mathbb{R}_k[x]$?
2. Rozważmy ciąg wielomianów: $f_0(x) = 1$, $f_a(x) = \prod_{j=0}^{a-1}(x - j)$ dla $a \geqslant 1$. Pokaż, że zbiór $\{f_0, \ldots, f_k\}$ jest bazą $\mathbb{R}_k[x]$.
3. Wyznacz $k$-tą pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{1-x}$.
4. Pokaż, że $\sum_{n\geqslant k} n^{\underline{k}} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ dla $|x| < 1$, gdzie $n^{\underline{k}} = \prod_{a=0}^{k-1}(n - a)$.
5. Niech $P(x)$ będzie dowolnym wielomianem. Jak możesz wyznaczyć zwartą formułę na

$$\sum_{n\geqslant 0} P(n) x^n$$

   dla $|x| < 1$?. Wskazówka: Skorzystaj z poprzednich punktów tego zadania.
6. Poradź sobie teraz z podobnym zadaniem dla wykładniczej funkcji tworzącej

$$\sum_{n\geqslant 0} P(n) \frac{x^n}{n!}$$

**Zadanie 26** — Niech $f$ będzie zwykła funkcją tworzącą ciągu $(a_n)_{n\geqslant 0}$. Zapisz możliwie prosto za pomocą funkcj $f$ funkcje tworzące następujących ciągów:

1. $(na_n)_{n\geqslant 0}$
2. $0, a_1, a_2, a_3, \ldots$
3. $0, 0, 1, a_3, a_4, \ldots$
4. $a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \ldots$
5. $a_1, a_2, a_3, \ldots$
6. $(a_{n+k})_{n\geqslant o}$ dla ustalonego całkowitego $k > 0$

**Zadanie 27** — Powtórz poprzednie zadanie dla wykładniczej funkcji tworzącej.

**Zadanie 28** — Ustalmy liczbę $\gamma$. Rozważmy ciąg $(c_n)_{n\geqslant 0}$ zdefiniowany rekurencyjnie wzorami: $c_0 = \gamma$, $c_{n+1} = \gamma \cdot c_n + n$. Zastosuj metodę funkcji tworzących do wyznaczenia zwartego wzoru na $c_n$.

**Zadanie 29** — Niech $f(x)$ będzie szeregiem potęgowym. Pokaż, że

$$[x^k]x^n f(x) = \begin{cases} 0 : & 0 \leqslant k < n \\ [x^{k-n}]f(x) : & k \geqslant n \end{cases}$$

**Zadanie 30** — Załóżmy, że $(a_n) \bowtie (\rho^n)$ oraz $(b_n) \bowtie (\eta^n)$, gdzie $\rho > 0$ i $\eta > 0$.

1. Pokaż, że jeśli $\rho = \eta$ to $(a_n + b_n) \bowtie \rho^n$.
2. Pokaż, że $(a_n + b_n) \bowtie \max(\rho, \eta)^n$.

**Zadanie 31** — Załóżmy, że$(a_n) \bowtie (\rho^n)$ dla pewnego $\rho > 0$. Pokaż, że istnieje ciąg $(\Theta_n)$ taki, że $a_n = \Theta_n \cdot \rho^n$ oraz $(\Theta_n) \bowtie (1^n)$.

**Zadanie 32** — **(lab)** Napisz procedurę, która dla danej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takiej, że $f(0) \neq 0$ oraz danego $n$ zwraca $n$ pierwszych elementów formalnej odwrotności szeregu formalnego $\sum_{n\geqslant 0} f(n)x^n$. Zastosuj ją do wyznaczania 10 pierwszych elementów formalnej odwrotności dla następujących funkcji $f$:

1. $f(n) = 1$
2. $f(n) = 2^n$
3. $f(n) = n!$
4. $f(n) = 1/n!$.

# 4 Konstrukcje kombinatoryczne

## 4.1 Klasy kombinatoryczne

**Zadanie 33** — Niech $\mathcal{Z}_\bullet = (\{\bullet\}, |\cdot|)$, $|\bullet| = 1$. Rozważmy klasę kombinatoryczną $\mathcal{C} = SEQ(SEQ_+(\mathcal{Z}_\bullet))$.

1. Podaj interpretację kombinatoryczną klasy $\mathcal{C}$.
2. Wyznacz funkcję tworzącą klasy kombinatorycznej $\mathcal{C}(x)$ oraz znajdź zwartą formułę na liczbę elementów klasy $\mathcal{C}$ rozmiaru $n$.

**Zadanie 34** — Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolną klasą kombinatoryczną oraz niech $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, |.|)$, gdzie $|n| = n$. Niech $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{N}$.

1. Wyznacz funkcję tworzącą klasy $\mathcal{C}$
2. Jak z funkcji $\mathcal{C}(x)$ możesz odtworzyć funkcję $\mathcal{A}(x)$?

**Zadanie 35** — Niech $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$. Wyznacz zwartą formułę na $a_n$. Znajdź następnie klasę kombinatoryczną $\mathcal{A}$ taką, że $[x^n]SEQ(\mathcal{A})(x) = a_n$ dla każdego $n \geqslant 0$.

**Zadanie 36** — Załóżmy, że $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2-x^3}$. Wyznacz współczynniki $a_0$, $a_1$, $a_2$ oraz wyznacz liniowe równanie rekurencyjne spełnione przez ciąg $(a_n)_n$.

**Zadanie 37** — Niech $\mathcal{B} = SEQ(SEQ_+(\mathcal{Z}_\bullet))$. Podaj interpretację kombinatoryczną klasy $\mathcal{B}$ oraz wyznacz $[x^n]\mathcal{B}(x)$
Wskazówka: Przyjrzyj się najpierw klasom $SEQ(\mathcal{Z}_\bullet)$ i $SEQ_+(\mathcal{Z}_\bullet)$

**Zadanie 38** — Niech $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, |\cdot|)$ oraz $\mathcal{N}_+ = (\mathbb{N}_+, |\cdot|)$, gdzie $|n| = n$. Wyznacz $[x^n]\mathcal{N}^5(x)$ oraz $[x^n]\mathcal{N}_+^5(x)$.

## 4.2 Pojęcie Kategorii

**Zadanie 39 — (”Jednoznaczność odwrotności”)** Niech $\mathcal{C}$ będzie dowolną kategorią. Niech $X$ i $Y$ będą obiektami kategorii $\mathcal{C}$ oraz niech $f : X \to Y$, $g_1 : Y \to X$ $g_2 : Y \to X$ będą morfizmami $\mathcal{C}$ takimi, że $f \circ g_i = 1_Y$ i $g_i \circ f = 1_X$ dla $i = 1, 2$. Pokaż, że $g_1 = g_2$.

**Zadanie 40 —** Niech $\mathcal{C} = (C, \mathcal{M})$ będzie dowolną kategorią. Niech $\mathcal{C}^{op}$ będzie kategorią określoną następująco: obiektami tej kategorii są obiekty kategorii $\mathcal{C}$; $f$ jest morfizmem w tej kategorii między $X$ a $Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f$ jest morfizmem w $\mathcal{C}$ między $Y$ a $X$.

1. Pokaż, że $\mathcal{C}^{op}$ jest kategorią.
2. Niech $\mathcal{C} = (\{1, 2, 3, 6\}, |)$. Opisz kategorię $\mathcal{C}^{op}$.

**Zadanie 41 —** Pokaż, że w dowolnej kategorii obiekty początkowe oraz obiekty końcowe są jednoznaczne z dokładnością do izomorfizmu. Spróbuj wykorzystać poprzednie zadanie do uproszenia tego zadania.

**Zadanie 42 —** Wyznacz obiekty początkowe i końcowe w kategorii Monoidów.

**Zadanie 43 —** Rozważmy częściowy porządek $\mathcal{P} = (P(\{0, 1\}), \subseteq)$ traktowany jako skończona kategoria. Opisz funktory z kategorii $\mathcal{P}$ w kategorię SET.

**Zadanie 44 —** Pokaż, że złożenie funktorów jest funktorem.

**Zadanie 45 —** Pracujemy w kategorii SET. Rozszerz operację $F(X) = X \times X \times X$ do funktora.

**Zadanie 46 —** Pracujemy w kategorii SET. Ustalmy zbiór $A$. Rozważamy operację $H_A(X) = X^A$. Rozszerz $H_A$ do funktora.

**Zadanie 47 —** Pracujemy w kategorii SET. Niech $F(X) = \mathbb{N}^X$. Pokaż, że $F$ nie można rozszerzyć do funktora.

**Zadanie 48 — (lab)** Niech $sd(n)$ oznacza sumę cyfr przedstawienia liczby $n$ u układzie dwójkowym. Niech $s(n) = \sum_{k=1}^{n} sd(k)$.

1. Napisz program wyliczający funkcję $s$ i wyświetl wykres funkcji $s$ dla $n \in \{1, \ldots, 1024\}$
2. Spróbuj odgadnąć asymptotykę $a(n)$ funkcji $s(n)$ oraz narysuj wykres funkcji $s(n) - a(n)$ dla $n \in \{1, \ldots, 1024\}$.
3. Spróbuj dobrać współczynnik skalujący i postaw rozsądną hipotezę o zachowaniu się funkcji $s$.

**Zadanie 49 — (lab)** Niech $P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^n}$. Różniczkując obie strony wyrażenia

$$\ln P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{1}{1 - z^n}$$

Pokaż, że

$$x \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}$$

Niech $p_n = [x^n]P(x)$. Wywnioskuj z powyższego równania, że

$$np_n = \sum_{j=1}^{n} \sigma(n) p_{n-j} \ ,$$

gdzie $\sigma(n)$ jest równa sumie dzielników liczby $n$ (np. $\sigma(5) = 1 + 6 = 6$, zaś $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$).

1. Korzystając z powyższej równości równości napisz program wyznaczający liczby $p_n$ i oblicz $p_n$ dla $n = 1, \ldots, 100$.
2. Jaka jest złożoność obliczeniowa napisanej procedury?

## 5 Struktury etykietowane

Oznaczania:

1. $E[U] = \{U\}$.
2. $X[U] = \begin{cases} \{U\} & : |U| = 1 \\ \emptyset & : |X| \neq 1 \end{cases}$
3. $\mathcal{C}[U]$ = zbiór wszystkich cykli na zbiorze $U$
4. $\mathcal{L}[U]$ = zbiór liniowych porządków na $U$
5. $\mathcal{S}[U]$ = zbiór permutacji zbioru $U$

**Zadanie 50** — Niech $P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^n}$. Pokaż, że $P(x)$ jest zbieżne dla każdego $z \in (-1, 1)$.

**Zadanie 51** — Partycją (rozbiciem) zbioru $A$ nazywamy taki zbiór $\pi$, że $\bigcup \pi = A$ oraz

$$(\forall X, Y \in \pi)(X \neq Y \to X \cap Y = \emptyset) \ .$$

Jakie są partycje zbioru pustego ?

**Zadanie 52** — Niech $F$ będzie gatunkiem kombinatorycznym. Ustalmy skończony zbiór $U$. Dla $a, b \in F[U]$ określamy

$$a \sim b \longleftrightarrow (\exists \pi \in \mathcal{S}[U])(F[\pi](a) = b)$$

Pokaż, że $\sim$ jest relacją równoważności na $F[U]$.

**Zadanie 53** — Interesujemy się permutacjami składającymi się tylko z cykli parzystej długości.

1. Niech $\mathcal{C}_{even}[U] = \{\pi \in \mathcal{P}[U] : \pi$ jest cyklem o parzystej liczbie elementów$\}$. Uzupełnij tę definicję do definicji funktora (czyli zrób z tego gatunek kombinatoryczny). Wyznacz wykładniczą funkcją tworzącą $CYC_{even}(x)$.
2. Definiujemy gatunek $\mathcal{P}_{even} = E \circ \mathcal{C}_{even}$ i wyznacz wykładniczą funkcją tworzącą $\mathcal{P}_{even}(x)$.
3. Wyznacz $n![x^n]\mathcal{P}_{even}(x)$. Możesz skorzystać ze wzoru
$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n} \ ,$$
ale warto abyś sam umiał ten wzór wyprowadzić.
4. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że cykle losowo wybranej permutacji zbioru $\{1, \ldots, 2n\}$ są tylko długości parzystej? Wyznacz asymptotę tego prawdopodobieństwa.

**Zadanie 54** — Rozważmy gatunek $CP_2[U] = U \times U$.

1. Uzupełnij definicję tego gatunku o działanie $CP_2[f]$ dla $f : X \to Y$.
2. Wyznacz $CP_2(x)$
3. Wyznacz $\widetilde{CP_2}(x)$

**Zadanie 55** — Niech

$$E_k[U] = \begin{cases} \{U\} & : |U| = k \\ \emptyset & : |U| \neq k \end{cases} .$$

Niech $Der[U] = \{\pi \in S[U] : (\forall u \in U)(\pi(u) \neq u)\}$.

1. Podaj interpretację kombinatoryczną gatunku $E_k \cdot Der$.
2. Wyznacz $(E_k \circ Der)(x)$.
3. Zbadaj asymptotykę liczb $[x^n](E_k \circ Der)(x)$.

**Zadanie 56** — Niech $E_1$ oznacza gatunek singletonów, czyli

$$E_1[U] = \begin{cases} \{U\} & : |U| = 1 \\ \emptyset & : |U| \neq 1 \end{cases} .$$

Pokaż, że dla każdego gatunku kombinatorycznego $\mathcal{F}$ mamy $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}(E_1)$.

**Zadanie 57** — Ustalmy $k \geqslant 1$. Niech $F_k = \underbrace{E \cdot E \cdot \ldots \cdot E}_{k}$ oraz $G_k[X] = \{(A_1, \ldots, A_k) : A_1, \ldots A_k \subseteq U \wedge \bigvee_{i<j}(A_i \cap A_j = \emptyset)\}$

1. Pokaż, że gatunki $F_{k+1}$ oraz $G_k$ są izomorficzne.
2. Wyznacz funkcję tworzącą oraz funkcję tworzącą typy gatunku $G_k$.

**Zadanie 58** — Podaj interpretację kombinatoryczną gatunku $\mathcal{C}(X+X)$ oraz wyznacz jego wykładniczą i normalną funkcję tworzącą.

**Zadanie 59** — Ustalmy zbiór $A$. Niech $Fnc_A[U] = U^A$ oraz $Sur_A[U] = \{f \in Fnc_A[U] : f[A] = U\}$.

1. Pokaż, że $Fnc_A = Sur_A \cdot E$.
2. Wyprowadź z powyższej równości wzór na liczbę surjekcji ze zbioru $A$ na zbiór $[n]$.

**Zadanie 60** — Zbadaj liczbę funkcji $f : [n] \to [n]$ takich, że $f \circ f = f$.

**Zadanie 61** — Ośmiornicami nazywamy elementy gatunku kombinatorycznego $Oct = \mathcal{C}(\mathcal{L}_+)$.

1. Wyznacz wykładniczą funkcję tworzącą $Oct(x)$.
2. Pokaż, że $Oct(x) = \mathcal{C}(2x) - \mathcal{C}(x)$.
3. Powyższy wzór sugeruje, że $Oct + \mathcal{C} = \mathcal{C}(X + X)$. Spróbuj wskazać izomorfizm między tymi gatunkami.
4. Wyznacz zwartą formułę na $[x]^n Oct(x)$.

**Zadanie 62** — Ustalmy niepusty, skończony zbiór $\Sigma$. Rozważmy następujący gatunek: $S_\Sigma[X] = \mathcal{L}[X] \times \Sigma^X$ z działaniem na morfizmach $f : X \to Y$ określonym wzorem

$$S_\Sigma[f]((L, \phi)) = (\{(f(x), f(y)) : (x, y) \in L\}, \phi \circ f^{-1}) \ ,$$

gdzie $\mathcal{L}[U]$ oznacza zbiór wszystkich liniowych porządków na zbiorze $U$.

1. Zacznij od pokazania, że $S_\Sigma$ jest gatunkiem kombinatorycznym.
2. Wyznacz wykładniczą funkcję tworzącą $S_\Sigma[z]$.
3. Wyznacz funkcję tworzącą $\widetilde{S_\Sigma}(x)$.

**Zadanie 63** — Załóżmy, że gatunki $F$ i $G$ są naturalnie izomorficzne. Pokaż, że $\widetilde{F}(x) = \widetilde{G}(x)$.

**Zadanie 64** — **(lab)** Niech $f(z) = \frac{1}{(1-z)^z}$ (jest to funkcja tworząca gatunku "children rounds".

1. Skorzystaj z jakiegoś narzędzia który umożliwia obliczenia do wyznaczenia współczynników $r_n = [x^n]f(z)$ dla $n = 1, \ldots, 100$.
2. Spróbuj odgadnąć asymptotykę ciągu $(r_n)_{n \geqslant 0}$.

## 5.1 Nieklasyczne funkcje tworzące

**Zadanie 65** — **(lab)** Niech $b_0 = 1$ oraz $b_n = n^2 b_{n-1} + 1$ dla $n > 0$. Chcemy znaleźć możliwie prostą formułę na $b_n$.

1. Spróbuj zastosować normalną oraz wykładniczą funkcję tworzącą ciągu $(b_n)$. Zobacz gdzie natrafisz na trudności.
2. Rozważ funkcję
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{z^n}{(n!)^2}$$
i za jej pomocą wyznacz wzór na $b_n$
3. Korzystając z otrzymanego wzoru pokaż, że jest stała $c$ taka, że $2.27 < c < 2.28$ oraz
$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{(n!)^2} = c$$
.

**Zadanie 66** — **(lab)** Niech $fix(n)$ oznacza średnią liczbę punktów stałych permutacji zbioru $[n]$.

1. Korzystając z algorytmu Fishera-Yates'a zbadaj eksperymentalnie liczby $fix(n)$ dla $n \leqslant 100$.
2. Postaraj się o postawienie rozsądnej hipotezy na temat liczb $fix(n)$.
3. Udowodnij postawioną hipotezę.

# 6 Funkcje zespolone

## 6.1 Podstawy

**Zadanie 67** — Dla liczby zespolonej $z = a + b\imath$ definiujemy

$$\phi(z) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

1.Pokaż, że odwzorowanie $\phi(z)$ jest monomorfizmem z pierścienia $\mathbb{C}$ w pierścień macierzy $M_{2\times 2}(R)$.

2.Pokaż, że $\det(\phi(z)) = |z|$.

3.Pokaż, że jeśli $z \neq 0$ to $\phi(z^{-1}) = (\phi(z))^{-1}$.

**Zadanie 68** — Zbiór $D \subseteq \mathbb{C}$ nazywamy domkniętym, jeśli jego dopełnienie jest otwarte. Pokaż, że dla dowolnego zbioru $D \subseteq \mathbb{C}$ następujące zdania są równoważne

1.$D$ jest zbiorem domkniętym

2.dla dowolnego zbieżnego ciągu punktów zbioru $D$ jesgo granica należy do $D$.

**Zadanie 69** — Niech $\mathrm{POWER}(z_1, z_2) = \exp(z_2 \ln(z_1))$.

1.Niech $a \in \mathbb{R}$. Wyznacz $\mathrm{POWER}(a, \frac{1}{2})$.

2.Oblicz $\mathrm{POWER}(\imath, \imath)$.

3.Załóżmy, że $b$ jest liczbą wymierną. Pokaż, że $\mathrm{POWER}(z, b)$ przyjmuje skończenie wiele wartoś

**Zadanie 70** — Pokaż, że funkcja $f(z) = |z|$ jest ciągła oraz, że nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie.

**Zadanie 71** — Pokaż, że funkcja $f(z) = |z|^2$ jest różniczkowalna tylko w punkcie 0.

**Zadanie 72** — Pokaż, korzystając bezpośrednio z definicji pochodnej funkcji zespolonej, że

1. istnienie pochodnej funkcji $f$ w punkcie $z$ implikuje ciągłość funkcji $f$ w punkcie $z$
2. $(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

**Uwaga:** To zadanie służy tylko do sprawdzenia tego, że większość klasycznych rozumowań z analizy matematycznej funkcji jednej zmiennej przenosi się prawie literalnie na funkcje zmiennej zespolonej.

**Zadanie 73** — Niech $f(z) = \frac{1}{2-e^z}$

1. Wyznacz dziedzinę funkcji $f$.
2. Oblicz $\lim_{z\to\ln 2} \frac{z-\ln 2}{2-e^z}$. Wskazówka: Zastosuj regułę de'Hospitala.

**Zadanie 74** — **(lab)** Narysuj, za pomocą dowolnego narzędzia, wykresy powierzchni w $\mathbb{R}^3$ zadanych następującymi równaniami:

1.$S_r = \{(\Re(re^{\imath t}), \Im(re^{\imath t}), \Re(\sqrt{r}\exp(\imath t/2)) : r \in [0,1], t \in [0, 4\pi]\}$

2.$S_c = \{(\Re(re^{\imath t}), \Im(re^{\imath t}), \Im(\sqrt{r}\exp(\imath t/2)) : r \in [0,1], t \in [0, 4\pi]\}$

3.$L = \{(\Re(re^{\imath t}), \Im(re^{\imath t}), |\ln(r) + \imath t|) : r \in [0.1, 10], t \in [0, 8\pi]\}$

## 6.2 Całka krzywoliniowa

**Zadanie 75** — Niech $\gamma(t) = t + \imath \cdot t^2$ dla $t \in [0, 1]$.

1. Oblicz długość krzywej $\gamma$. Wskazówka: Zastosuj podstawienie hiperboliczne, np. $u = a \sinh(t)$
2. Oblicz $\int_\gamma z dz$
3. Oblicz $\int_\gamma z^2 dz$

**Zadanie 76** — Niech $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ będzie krzywą ciągłą. Niech $C = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$. Załóżmy, że $z_0 \notin C$.

1. Pokaż, że $\inf\{|\xi - z_0| : \xi \in C\} > 0$.
2. Pokaż, że jest $r > 0$ takie, że $B(z_0, r) \cap C = \emptyset$.

**Zadanie 77** — **(Niezależność od parametryzacji)** Niech $\alpha : [a, b] \to [c, b]$ będzie gładka oraz $\alpha(a) = c$ i $\alpha(b) = d$. Niech $\beta : [c, d] \to \mathbb{C}$ będzie gładka. Pokaż, że

$$\int_{\beta \circ \alpha} f dz = \int_\beta f dz \ .$$

**Zadanie 78** — Zbadaj zachowanie się następujących szeregów potęgowych na brzegu koła zbieżności (w szczególności: znajdź ich punkty osobliwe):

1. $\sum_{n \geqslant 1} x^n$
2. $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}$
3. $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$

Wskazówka: Możesz skorzystać z następującego kryterium Dirichleta: jeśli ciąg $(a_n)$ jest nierosnący ($n < m \to a_n \geqslant a_m$)zbiega do zera oraz sumy częściowe szeregu $\sum_n b_n$ są ograniczone, to szereg $\sum_n a_n b_n$ jest zbieżny.

**Zadanie 79** — Niech

$$f(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{z - \alpha_i} + \sum_{i=1}^{M} \frac{B_i}{z - \beta_i} \ .$$

Niech $C$ będzie krzywą zamkniętą wewnątrz leżą punkty $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ i na zawnątrz której leżą punkty $\{\beta_1, \ldots, \beta_M\}$. Oblicz $\int_C f(z)dz$.

**Zadanie 80** — **(lab)** Wygeneruj wykresy funkcji $g(z) = |f(z)|$, gdzie

1. $f(z) = |z|$
2. $f(z) = |z^2|$
3. $f(z) = \frac{1}{2-e^z}$
4. $f(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z/2)(1-z/3)}$
5. $f(z) = \frac{1+z+z^2}{1-z-z^2-z^3}$
6. $f(z) = \frac{e^{-z}}{2-e^z}$
7. $f(z) = \sqrt{1-4z}$

**Zadanie 81** — Wyznacz aproksymację asymptotyk następujących klas kombinatorycznych

1. $\mathcal{A} = Mult(\mathcal{B})$, gdzie $\mathcal{B} = (\{a, b, c\}, |\cdot|)$ oraz $|a| = 1$, $|b| = 2$ i $|c| = 5$.
2. $\mathcal{C}$ = klasa ciągów zero-jedynkowych w których nie występuje podciąg 000, Wskazówka: Klasa ta spełnia następujące równanie $\mathcal{C} = (\mathcal{E} + \{0\} + \{00\}) \times (\mathcal{E} + \{1\} \times \mathcal{C})$.
3. $\mathcal{P}_{\geqslant M}$ = klasa permutacji bez cykli długości $\leqslant M$ Wskazówka: Pokaż najpierw, że

$$\mathcal{P}_{\geqslant M}(z) = \frac{\exp(-z - \frac{z^2}{2} - \ldots - \frac{z^M}{M})}{1 - z}$$

c.d.n.
Powodzenia,
Jacek Cichoń