Egzamin z LiSF
termin drugi - 13.02.2023

Zadanie 1. Niech A, B i będą dowolnymi zbiorami. Pokaż, że

$$(A \cup B) \triangle (A \cap B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Zadanie 2. Załóżmy, że $A \subseteq B \subseteq C$. Pokaż, że

$$A \triangle C = (C \triangle B) \cup (B \setminus A) \ .$$

Zadanie 3. Wyznacz moc zbioru $\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (\forall n)(f(n+1) \leqslant f(n))\}$

Zadanie 4. Na zbiorze $P(\mathbb{N})$ określamy relację równoważności $\cong$ wzorem

$$A \cong B \leftrightarrow (A \cap \{0,1,2,3\} = B \cap \{0,1,2,3\}) \ .$$

1. Opisz $P(\mathbb{N})/\cong$ i wyznacz moc tego zbioru.
2. Podaj przykład selektora rodziny $P(\mathbb{N})/\cong$.
3. Wyznacz moc zbioru wszystkich selektorów rodziny $P(\mathbb{N})/\cong$.

Zadanie 5. Niech $[\mathbb{N}]^\omega = \{X \in P(\mathbb{N}) : |X| = \aleph_0\}$. Na zbiorze $[\mathbb{N}]^\omega$ określamy relację równoważności wzorem

$$(X \cong Y) \leftrightarrow (|X \triangle Y| < \aleph_0) \ .$$

Następnie, na zbiorze $[\mathbb{N}]^\omega/\cong$ definiujemy

$$([A]_\cong \leqslant [B]_\cong) \leftrightarrow (|A \setminus B| < \aleph_0) \ .$$

Pokaż, że jeśli $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest takim ciągiem elementów $[\mathbb{N}]^\omega$, że $(\forall n \in \mathbb{N})([A_{n+1}]_\cong \leqslant [A_n]_\cong)$, to istnieje $B \in [\mathbb{N}]^\omega$ taki, że

$$(\forall n \in \mathbb{N})([B]_\cong \leqslant [A_n]_\cong) \ .$$

Powodzenia,
Jacek Cichoń