# Logika i Struktury Formalne
# Lista zadań

Jacek Cichoń
Politechnika Wrocławska, WIT

Wrocław • 2024

## R1: Rachunek Zdań

### Zadanie 1

Niech $\pi$ będzie waluacja określoną na zbiorze zdań $\{p_1, p_1, p_2, \ldots\}$ taką, że $\pi(p_i) = \mathbb{1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i$ jest liczbą parzystą. Oblicz

1. $\mathrm{val}(p_0 \to (p_1 \land p_2), \pi)$
2. $\mathrm{val}((p_1 \lor p_2) \land (p_0 \lor p_1), \pi)$
3. $\mathrm{val}(\bot \to (p_1 \land p_2), \pi)$
4. $\mathrm{val}(p_0 \to (\top \land \bot), \pi)$

### Zadanie 2

Które z następujących zdania są tautologiami:

1. $(p \land (q \lor r)) \leftrightarrow ((p \land q) \lor (p \land r))$
2. $((p \to q) \to p) \leftrightarrow p$
3. $(p \lor (q \land r)) \leftrightarrow ((p \lor q) \land (p \lor r))$
4. $\neg(p \land q) \leftrightarrow (\neg p \land \neg q)$
5. $\neg(p \land q) \leftrightarrow (\neg p \lor \neg q)$
6. $((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$
7. $p \to (\neg p \to q)$
8. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \land q) \lor (\neg p \land \neg q))$

### Zadanie 3

Pokaż, że następujące zdania są tautologiami:

1. $(\neg(p_1 \lor \ldots \lor p_n)) \leftrightarrow ((\neg p_1) \land \ldots \land (\neg p_n))$
2. $(\neg(p_1 \land \ldots \land p_n)) \leftrightarrow ((\neg p_1) \lor \ldots \lor (\neg p_n))$
3. $(p_1 \to (p_2 \to (p_3 \to p_4))) \leftrightarrow (\neg p_1 \lor \neg p_2 \lor \neg p_3 \lor p_4)$

### Zadanie 4

Działanie binarne $\bullet$ na zbiorze $X$ nazywamy *łącznym*, jeśli $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$ dla dowolnych $x, y, z \in X$. Działanie $\bullet$ nazywamy *przemiennym* jeśli $x \bullet y = y \bullet x$ dla dowolnych $x, y \in X$.

1. Pokaż, że z łączności działania $\bullet$ wynika, że dla dowolnych $p$, $q$, $r$ i $s$ ze zbioru $X$ mamy

$$p \bullet (q \bullet (r \bullet s)) = ((p \bullet q) \bullet r) \bullet s = ((p \bullet q) \bullet (r \bullet s)\ .$$

2. Pokaż, że potęgowanie $\wedge$ określone na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich wzorem $x \wedge y = x^y$ nie jest działaniem łącznym oraz że nie jest działaniem przemiennym.

## Zadanie 5

Pokaż, że jeśli średnia arytmetyczna liczb $x_1, \dots, x_n$ jest większa od liczby $a$, to co najmniej jedna z tych liczb jest większa od liczby $a$. Przeprowadź dokładną analizę przeprowadzonego rozumowania.

## Zadanie 6

Zgodnie z używanym obecnie kalendarzem gregoriańskim:

> Rok jest przestępny, jeśli dzieli się przez 4, lecz nie dzieli się przez 100, chyba, że dzieli się przez 400.

Niech $p$ oznacza zdanie „rok R jest podzielny przez 4”, $q$ - „rok R jest podzielny przez 100”, i $r$ - „rok R jest podzielny przez 400”.

1. Zapisz za pomocą zdań $p$, $q$ i $r$ zdanie „rok R jest przestępny”.
2. Napisz w języku C funkcję służącą do sprawdzania, czy dany rok jest przestępny.
3. Spróbuj zrobić to samo w języku Python.

## Zadanie 7

*Spójnik Pierce*, zwany również operatorem NOR, jest zdefiniowany wzorem $p \perp q = (\neg p \wedge \neg q)$. *Kreska Sheffera*, zwana również operatorem NAND, jest zdefiniowana wzorem $p \uparrow q = (\neg p \vee \neg q)$.

1. Wyraź alternatywę, implikację oraz równoważność za pomocą negacji oraz koniunkcji.
2. Wyraź koniunkcję, implikację oraz równoważność za pomocą negacji oraz alternatywy.
3. Wyraź negację, koniunkcję, alternatywę, implikację oraz równoważność za pomocą spójnika Pierce'a.
4. Wyraź negację, koniunkcję, alternatywę, implikację oraz równoważność za pomocą kreski Sheffera.

## Zadanie 8

Spójnik $\triangle$, zwany *operatorem XOR*, jest zdefiniowany wzorem $p \triangle q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

1. Udowodnij łączność oraz przemienność spójnika $\triangle$.
2. Oblicz $p \triangle p$, $(p \triangle q) \triangle q$, $p \triangle \perp$, $p \triangle \top$.
3. Zastanów się jak można wykorzystać własności spójnika $\triangle$ do kodowania informacji.

## Zadanie 9

Język C posiada następujące operatory logiczne: && (koniunkcja), || (alternatywa) oraz ! (negacja). Zdefiniuj w tym języku pozostałe standardowe operatory logiczne.

## Zadanie 10

Udowodnij poprawność następujących reguł dowodzenia:

1. $\{p\} \models p$,

2. $\{p, q\} \models p \wedge q$,
3. $\{p \wedge q\} \models p$,
4. $\{p, \neg p\} \models q$,
5. $\{p, p \rightarrow q\} \models q$, (reguła *Modus Ponens*)
6. $\{p \vee \alpha, \neg p \vee \beta\} \models \alpha \vee \beta$ (*reguła rezolucji*).

## Zadanie 11

Bez korzystania z tabelek zero-jedynkowych pokaż, że

1. $\{p_1, \neg p_1 \vee p_2, \neg p_2 \vee p_3, \neg p_3 \vee p_4\} \models p_4$
2. $\{\neg p_1, p_1 \vee p_2, \neg p_2 \vee p_3, \neg p_3 \vee p_4\} \models p_4$

## * Zadanie 12

Pokaż, że jeśli zdanie jest zbudowane tylko ze stałych zdaniowych $\perp$ i $\top$, to jest ono tautologią lub zdaniem sprzecznym.

## * Zadanie 13

Załóżmy że $\varphi(p_0, \ldots, p_n)$ jest tautologią oraz że $\psi_0, \ldots \psi_n$ są ustalonymi zdaniami. Pokaż, że zdanie $\varphi(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ jest również tautologią.

## Zadanie 14

Niech $\varphi_0 = p$ oraz $\varphi_{n+1} = (\varphi_n) \rightarrow p$ dla liczb naturalnych $n$. Dla jakich liczb naturalnych $n$ zdanie $\varphi_n$ jest tautologią?

## * Zadanie 15

Ile istnieje nierównoważnych formuł rachunku zdań zbudowanych ze zmiennej zdaniowe $p$? Ile istnieje nierównoważnych formuł rachunku zdań zbudowanych ze zmiennych zdaniowych $p$, $q$?

## * Zadanie 16

Ile jest waluacji $\pi$ określonych dla zmiennych zdaniowych $p_1, p_2, \ldots, p_n$ takich, że

1. $\mathrm{val}((p_1 \vee p_2) \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge \ldots \wedge p_n, \pi) = \mathbb{1}$
2. $\mathrm{val}((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n), \pi) = \mathbb{1}$

## Zadanie 17 (*Lewis Carroll*)

Pokaż, że z następującego zbioru zdań

1. wszyscy moi synowie są szczupli,
2. wszystkie moje zdrowe dzieci uprawiają sport,
3. żadne moje dziecko które jest łakomczuchem nie jest szczupłe,
4. żadna moja córka nie uprawia sportu

wynika, że "żadne moje zdrowe dziecko nie jest łakomczuchem".
Wskazówka: Skorzystaj z reguły rezolucji (patrz zadanie 10).

## ** Zadanie 18

Pokaż, że za pomocą koniunkcji i alternatywy nie można zdefiniować negacji. Pokaż, że za pomocą alternatywy i koniunkcji nie można zdefiniować implikacji

### * Zadanie 19

Zapisz w postaci DNF (dysjunkcyjno normalnej) oraz CNF (koniunkcyjno normalnej) zdanie $(p \leftrightarrow q)$.

### Zadanie 20

Niech $\phi = (p_{11} \wedge p_{12}) \vee (p_{21} \wedge p_{22}) \vee (p_{31} \wedge p_{32}) \vee (p_{41} \wedge p_{42})$.

1. Przekształć zdanie $\phi$ do równoważnego zdania $\psi$ w postaci koniunkcyjno-normalnej.
2. Z ilu klauzul składa się zdanie $\psi$?
3. Spróbuj uogólnić to zadanie.

### Zadanie 21

Uprość następujące wyrażenia języka C:

1. `if (!(x>0) || !(x>10)) {...}`
2. `if ((x<0) || (! (x<0) && (y>0))) {...}`
3. `if (!(!(x<0) || (y>0))) {...}`

### Zadanie 22

Załóżmy, że $p$ i $q$ są wyrażeniami logicznymi języka C oraz że $A$ i $B$ są jakimiś blokami kodu. Uprość następującą konstrukcję

```
 if (p) {
  if (q) then A
         else B
} else {
  if (q) then B
         else A
}
```

### Zadanie 23

Zbadaj spełnialność następującego zdania Horna:

$$
\begin{aligned}
&(\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge \\
&(\neg b \vee \neg c \vee f) \wedge \\
&(\neg f \vee b) \wedge \\
&(\neg e \vee \neg c \vee a) \wedge \\
&(f) \wedge \\
&(\neg d \vee e) \wedge \\
&(\neg b \vee \neg c)
\end{aligned}
$$

### ** Zadanie 24

Na pewnej wyspie mieszka dwóch tubylców. Jeden z nich zawsze mówi prawdę, drugi - zawsze kłamie. Na wyspę dostał się wędrowiec. Stanął przed rozwidleniem dróg. Spotkał tubylca. Chce dowiedzieć się która z dwóch dróg doprowadzi go do stolicy. Może zadać tylko jedno pytanie. Jak powinien je sformułować?

## R2: Zbiory

## Zadanie 25

Które z następujących zdań są prawdziwe dla dowolnych zbiorów $A, B$:

1. $A \cup B = B \cup A$,
2. $A \cup B = B \cap A$,
3. $A \cup (A \cap A) = A \cap A$,
4. $A \vartriangle A = B \vartriangle B$,
5. $A \vartriangle A = (B \vartriangle B) \vartriangle A$.

## Zadanie 26

Pokaż, że z Aksjomatu Ekstensjonalności wynika, że operacja przekroju jest poprawnie określona. To znaczy, pokaż że jeśli $A$ i $B$ są dowolnymi zbiorami, to istnieje tylko jeden zbiór $C$ taki, że $x \in C \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$. Pokaż to samo dla różnicy zbiorów.

## Zadanie 27

Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B i C prawdziwe są następujące równości:

1. $A \cap A = A$,
2. $A \cup B = B \cup A$,
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
5. $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$
6. $(A \vartriangle B) \cap C = (A \cap C) \vartriangle (B \cap C)$.

## Zadanie 28

Zapisz za pomocą symbolu inkluzji Aksjomat Ekstensjonalności.

## Zadanie 29

Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B i C prawdziwe są następujące zdania:

1. $A \subseteq A$,
2. $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \to A \subseteq C$,
3. $A \subseteq A \cup B$,
4. $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C) \to A \cup B \subseteq C$,
5. $A \cap B \subseteq A$,
6. $(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C) \to A \subseteq B \cap C$,
7. $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \to A \cup C \subseteq B \cup D$,
8. $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \to A \cap C \subseteq B \cap D$.

## Zadanie 30

Niech $A$ i $B$ będą podzbiorami ustalonej przestrzeni $\Omega$. Pokaż, że

1. $(A^c)^c = A$,
2. $A \setminus B = A \cap B^c$,
3. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
4. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,
5. $\emptyset^c = \Omega$,
6. $\Omega^c = \emptyset$,

7. $A \subseteq B \rightarrow B^c \subseteq A^c$.

### Zadanie 31

Pokaż, że $A \cup B$ jest najmniejszym (w sensie inkluzji) zbiorem zawierającym jednocześnie zbiory $A$ oraz $B$. Sformułuj i udowodnij analogiczny fakt dla przekroju dwóch zbiorów.

### Zadanie 32

Pokaż, że $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ oraz $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ dla dowolnych zbiorów $A$, $B$, i $C$.

### Zadanie 33

Pokaż, że dla dowolnych zbiorów $A$ i $B$ mamy

$$A \setminus (A \setminus (A \setminus B)) = A \setminus B\ .$$

### Zadanie 34

Pokaż, ze dla dowolnych zbiorów $A$ i $B$ prawdziwa jest równoważność

$$A = B \leftrightarrow A \setminus B = B \setminus A\ .$$

### Zadanie 35

Rozwiąż równanie $[0,1] \triangle X = [-1, \frac{1}{2})$. Niech $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,4\}$ i $C = \{1,5\}$. Znajdź taki zbiór $X$, że $(A \triangle X) \triangle B = C$.

### Zadanie 36

Dlaczego $\{\emptyset\} \neq \emptyset$? Pokaż, że zbiory $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}, \ldots$ są parami różne. Wyznacz zbiory $\mathrm{P}(\emptyset)$, $\mathrm{P}(\mathrm{P}(\emptyset))$, $\mathrm{P}(\{a,b\})$ i $\mathrm{P}(\{a,b,c\})$. Ile elementów mają te zbiory?

### Zadanie 37

Niech $S(x) = x \cup \{x\}$. Niech $x_0 = \emptyset$ oraz $x_{n+1} = S(x_n)$ dla wszystkich liczb naturalnych $n$.

1. Wyznacz $x_n$ dla wszystkich $n \leqslant 5$.
2. Pokaż, że jeśli $n < m$ to $x_n \in x_m$.
3. Pokaż, że $x_{n+1} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

Uwaga: Metodą tą można zdefiniować liczby naturalne za pomocą zbiorów.

### Zadanie 38

Czy iloczyn kartezjański jest operacją łączną? Czy jest przemienny? Pokaż, że dla dowolnych zbiorów $A$, $B$ i $C$ prawdziwe są następujące równości:

1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
2. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

### Zadanie 39

Pokaż, że $A \times B = B \times A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B \vee A = \emptyset \vee B = \emptyset$.

### Zadanie 40

Pokaż, że $A \subseteq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{P}(A) \subseteq \mathrm{P}(B)$. Czy dla dowolnych zbiorów $A$ i $B$ prawdziwe są równości $\mathrm{P}(A) \cap \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B)$ i $\mathrm{P}(A) \cup \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cup B)$?

### Zadanie 41

Niech $A, B \subseteq \Omega$. Opisz rodzinę wszystkich zbiorów które mogą zostać zdefiniowane ze zbiorów $A$ i $B$ za pomocą operacji sumy, przekroju i dopełnienia.

### Zadanie 42

Niech $A = \{1, 2, 6, 7, 8\}, B = \{2, 3, 4, 7, 8\}$ i $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Ile różnych zbiorów możesz zbudować za pomocą operacji $\cup$, $\cap$, $^c$ ze zbiorów A, B i C? Czy zbiór $\{8\}$ należy do tej rodziny zbiorów?

### Zadanie 43

Zapisz w postaci "nawiasowej" wyrażenia $ABC \cup \cup$, $AB \cup C \cup$ oraz $ABC \cup \cup AB \cup C \cup =$.

### Zadanie 44

Niech $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ będą funkcjami zdaniowymi określonymi dla elementów przestrzeni $\Omega$. Pokaż, że

1. $\{x \in \Omega : \varphi(x)\}^c = \{x \in \Omega : \neg\varphi(x)\}$,
2. $\{x \in \Omega : \varphi(x) \wedge \psi(x)\} = \{x \in \Omega : \varphi(x)\} \cap \{x \in \Omega : \psi(x)\}$,
3. $\{x \in \Omega : \varphi(x) \vee \psi(x)\} = \{x \in \Omega : \varphi(x)\} \cup \{x \in \Omega : \psi(x)\}$.

### * Zadanie 45

Pokaż, że dla każdego zbioru $A$ zachodzi nierówność $A \neq \mathrm{P}(A)$.

### * Zadanie 46

Pokaż, że nie istnieje taki zbiór $\Omega$, że $A \subseteq \Omega$ dla dowolnego zbioru $A$.

### Zadanie 47

Jak można zaimplementować działania na podzbiorach zbioru $\{0, \ldots, 255\}$?

## R3: Kwantyfikatory

### Zadanie 48

Zakresem zmienności zmiennych jest zbiór liczb naturalnych. Zapisz przy użyciu symboli $0, 1, +, \cdot, \leqslant, |$ oraz symboli logicznych następujące funkcje zdaniowe:

1. $x$ jest liczbą parzystą,
2. $x$ jest liczbą pierwszą,
3. $x$ jest liczbą złożoną,
4. $x = NWD(y, z)$,
5. każde dwie liczby mają najmniejszą wspólną wielokrotność,
6. nie istnieje największa liczba pierwsza.
7. każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych (*hipoteza Goldbacha*)
8. każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb naturalnych (*twierdzenie Lagrange'a*)

## Zadanie 49

Niech zakresem zmienności zmiennych jest zbiór liczb rzeczywistych. Zapisz za pomocą symboli logicznych oraz symboli $=$, $<$, $\leqslant$, $+$, $\cdot$ i $\mathbb{Q}$ następujące formuły:

1. kwadrat każdej liczby jest nieujemny,
2. liczba $a$ jest ograniczeniem górnym zbioru $A$,
3. liczba $a$ jest kresem górnym zbioru $A$,
4. pomiędzy dowolnymi dwoma różnymi liczbami rzeczywistymi istnieje liczba wymierna,
5. funkcja f jest malejąca.

## Zadanie 50

Znajdź wykresy następujących formuł zmiennych $x$ i $y$, o zakresie zmienności równym $\mathbb{R}^2$: $x = y$, $x < y$, $x \leqslant y$, $x \cdot y < 1$, $|x \cdot y| < 1$, $(x \leqslant 0) \vee (x = y)$, $x \cdot y < 1 \to x \cdot y = 1$.

## Zadanie 51

Zapisz za pomocą kwantyfikatorów zdanie "g jest granicą ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$".

1. Zastosuj prawa de'Morgana do uproszczenia negacji tego zdania.
2. Pokaż, że liczba 1 nie jest granicą ciągu $a_n = \frac{1}{n+1}$.

## Zadanie 52

Niech predykat $r(x, y)$ oznacza, że $x$ jest rodzicem $y$, niech $m(x)$ oznacza, że $x$ jest mężczyzną. Zdefiniuj za pomocą formuł $r$ oraz $m$ następujące formuły:

1. "x jest bratem y"
2. "x jest kuzynką y"
3. "x jest pradziadkiem y"

## Zadanie 53

Dla każdej liczby rzeczywistej $t$ niech $A_t = \{(x, tx) : x \in \mathbb{R}\}$. Niech $\mathcal{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$. Wyznacz zbiór $\bigcup \mathcal{A}$.

## Zadanie 54

Pokaż, że dla dowolnych dwóch rodzin zbiorów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ zachodzi równość $\bigcup(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \bigcup \mathcal{A} \cup \bigcup \mathcal{B}$.

## Zadanie 55

Załóż że $\Omega$ jest zbiorem skończonym i niech $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Pokaż, że

1. $(\forall x)(\forall y)\psi(x, y) \leftrightarrow \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \bigwedge\limits_{j=1}^{n} \psi(\omega_i, \omega_j)$,
2. $(\forall x)(\exists y)\psi(x, y) \leftrightarrow \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \bigvee\limits_{j=1}^{n} \psi(\omega_i, \omega_j)$,
3. $(\exists x)(\exists y)\psi(x, y) \leftrightarrow \bigvee\limits_{i=1}^{n} \bigvee\limits_{j=1}^{n} \psi(\omega_i, \omega_j)$,

## Zadanie 56

Rozstrzygnij, który z graczy ma strategię zwycięską w grze „trzech zapałek" zaczynającą się od 30 zapałek. Opisz tę strategię.

### * Zadanie 57

Pokaż, że jeśli $a, b \in A$ to $(a, b) \in \mathrm{P}(\mathrm{P}(A))$. Wykorzystaj tę obserwację do zdefiniowanie iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów $A$ i $B$ za pomocą operacji zbioru potęgowego oraz wyróżniania.

### * Zadanie 58

Określmy następujące dwa kwantyfikatory stosowane do liczb naturalnych:

$$(\forall^\infty n)\psi(n) \leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n > k)\psi(n)$$

oraz

$$(\exists^\infty n)\psi(n) \leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N})(\exists n > k)\psi(n)\ .$$

1. Sformułuj i udowodnij prawa de Morgana dla tych kwantyfikatorów.
2. Pokaż, że dla dowolnej formuły $\psi$ zdanie

$$(\forall^\infty n)\psi(n) \rightarrow (\exists^\infty n)\psi(n)$$

   jest prawdziwe.
3. Sformułuj przy pomocy tych kwantyfikatorów pojęcie granicy ciągu oraz pojęcie punktu skupienia.
4. Bezpośrednio z własności tych kwantyfikatorów pokaż, że granica ciągu jest jego punktem skupienia.

### Zadanie 59

Pokaż, że dla każdego zbioru $A$ zachodzi równość $A = \bigcup \mathrm{P}(A)$.

### * Zadanie 60

Niech zakresem zmienności zmiennych będzie zbiór liczb całkowitych. Zapisz za pomocą symboli logicznych oraz symboli $+$, $\cdot$ predykat „$x \geqslant 0$”.
Wskazówka: Zapoznaj się z twierdzeniem Lagrange’a o sumach czterech kwadratów.

### *** Zadanie 61

Niech zakresem zmienności zmiennych będzie zbiór liczb naturalnych. Pokaż, że za pomocą symboli $0$, $1$, $+$ oraz $|$ można zdefiniować predykat „$x \cdot y = z$” (symbol $|$ oznacza podzielność bez reszty).

Wskazówka: Zdefiniuj najpierw predykat $(\exists y)(x = y^2)$. Przydać ci się mogą następujące tożsamości: $(x+y)^2 = x^2 + xy + xy + y^2$, $NWD(x, x+1) = 1$ oraz $x^2 + x = NWW(x, x+1)$, gdzie $NWD$ oznacza największy wspólny dzielnik, $NWW$ oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność. Zauważ, że formuły $x = NWD(y, z)$ oraz $x = NWW(y, z)$ możesz wyrazić za pomocą $|$ (w dziedzinie $\mathbb{N}$) .

### Zadanie 62

Wymień wszystkie poznane do tej pory warianty praw de’Morgana.

## R4: Relacje i funkcje

## Zadanie 63

Podaj przykład relacji która jest symetryczna, ale nie jest zwrotna ani przechodnia.

## Zadanie 64

Pokaż, że relacja $R$ jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ R \subseteq R$. Pokaż, że relacja $R$ jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R^{-1} = R$.

## Zadanie 65

Niech $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$ oraz $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(x)\}$. Narysuj wykres relacji $R$, $Q$, $R \circ Q$ oraz $Q \circ R$.

## Zadanie 66

Niech $R = \{(n, n + 1) : n \in \mathbb{N}\}$. Wyznacz najmniejszą relację przechodnią na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$ zawierającą relację $R$.

## Zadanie 67

Niech $R = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x < y\}$.

1. Wyznacz relację $R \circ R$.
2. Wyznacz relację $R \circ R^{-1}$.
3. Wyznacz relację $R^{-1} \circ R$.

## Zadanie 68

Wyznacz zbiory $\emptyset^\emptyset$, $X^\emptyset$ oraz $\emptyset^X$, gdzie $X$ jest dowolnym zbiorem niepustym.

## Zadanie 69

Niech $f$ będzie funkcją różnowartościową. Pokaż, że wtedy dla dowolnych zbiorów $A$ i $B$ mamy $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$. Sformułuj i udowodnij twierdzenie odwrotne.

## Zadanie 70

Niech $f$ będzie funkcją. Pokaż, że następujące dwa zdania są równoważne:

1. $(\forall A, B)(f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B])$,
2. $f$ jest injekcją

## Zadanie 71

Niech $f : B \to C$ będzie funkcją. Pokaż, że następujące dwa zdania są równoważne:

1. $f$ jest injekcją
2. $(\forall A)(\forall g, h : A \to B)(f \circ g = f \circ h \to g = h)$

Wskazówka: Własność (2) wykorzystuje się do zdefiniowania pojęcia monomorfizmu w Teorii Kategorii.

## Zadanie 72

Niech $f : A \to B$ będzie funkcją. Pokaż, że następujące dwa zdania są równoważne:

1. $f$ jest surjekcją (na $B$)
2. $(\forall C)(\forall g, h : B \to C)(g \circ f = h \circ f \to g = h)$

Wskazówka: Własność (2) wykorzystuje się do zdefiniowania pojęcia epimorfizmu w Teorii Kategorii.

## Zadanie 73

Niech $f$ będzie funkcją i $A$ dowolnym zbiorem. Pokaż, że $f \restriction A$ również jest funkcją oraz, że $\mathrm{dom}(f \restriction A) = \mathrm{dom}(f) \cap A$.

## Zadanie 74

Niech $f$ i $g$ będą funkcjami. Pokaż, że $f \cup g$ jest funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f \restriction (\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)) = g \restriction (\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)) \ .$$

## * Zadanie 75

Niech $\mathcal{F}$ będzie dowolna rodziną funkcji. Pokaż, że $\bigcup \mathcal{F}$ jest funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall f, g \in \mathcal{F})(f \cup g \text{ jest funkcją}) \ .$$

## Zadanie 76

Znajdź bijekcje pomiędzy następującymi parami zbiorów:

1. $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$,
2. $(0, 1)$ i $(3, 5)$,
3. $(0, 1)$ i $\mathbb{R}$,
4. $(0, 1)$ i $\mathbb{R}^+$,
5. $[0, 1]$ i $[0, 1)$.

## Zadanie 77

Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją zadaną wzorem

$$f((x, y)) = (x + y, x - y) \ .$$

Czy odwzorowanie $f$ jest injekcją? Czy odwzorowanie $f$ jest surjekcją? Znajdź $f[\mathbb{R} \times \{0\}]$, $f[L]$ oraz $f^{-1}[L]$, gdzie $L$ jest prostą zadaną równaniem $y = x + 1$.

## Zadanie 78

Niech $(A_t)_{t \in T}$ będzie rodziną zbiorów i niech $f$ będzie funkcją. Pokaż, że

1. $f[\bigcup\limits_{t \in T} A_t] = \bigcup\limits_{t \in T} f[A_t]$,
2. $f[\bigcap\limits_{t \in T} A_t] \subseteq \bigcap\limits_{t \in T} f[A_t]$,
3. $f^{-1}[\bigcup\limits_{t \in T} A_t] = \bigcup\limits_{t \in T} f^{-1}[A_t]$,
4. $f^{-1}[\bigcap\limits_{t \in T} A_t] = \bigcap\limits_{t \in T} f^{-1}[A_t]$.

## Zadanie 79

Ustalmy zbiór $\Omega$. Funkcją charakterystyczną zbioru $A \subseteq \Omega$ nazywamy funkcję $\mathbf{1}_A$ określoną wzorem $\mathbf{1}_A = (A^c \times \{0\}) \cup (A \times \{1\})$. Dlaczego funkcję $\mathbf{1}_A$ nazywa się czasem mapą bitową zbioru $A$? Pokaż, że dla podzbiorów $A, B$ przestrzeni $\Omega$ zachodzą następujące wzory: $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$, $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_{A \cup B} = 1 - (1 - \mathbf{1}_A) \cdot (1 - \mathbf{1}_B)$

## Zadanie 80

Niech $f : \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}^{10} \to \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ będzie funkcją tożsamościowo równą $\mathbb{1}$. Zastosuj do funkcji $f$ uniwersalną metodę wyznaczenia zdania $\varphi$ takiego, że $f = F_\varphi$ i wyznacz jego długość uwzględniając ilość zmiennych zdaniowych, spójników i nawiasów.

## Zadanie 81

Ile istnieje nierównoważnych formuł rachunku zdań zbudowanych ze zmiennych zdaniowych $p_1, \ldots, p_n$?
Wskazówka: Ile możesz zbudować różnych "tabelek zero-jedynkowych" dla $n$ zmiennych zdaniowych?.

## Zadanie 82

Niech $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < n|x|\}$ oraz $B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} \leqslant x \cdot y\}$. Oblicz $\bigcup\limits_{n \geqslant 1} A_n$ oraz $\bigcup\limits_{n \geqslant 1} B_n$.

## Zadanie 83

Niech $A_n = [-2 + (-1)^n, n)$. Oblicz $\bigcup\limits_{n} \bigcap\limits_{m>n} A_m$ oraz $\bigcap\limits_{n} \bigcup\limits_{m>n} A_m$ .

## Zadanie 84

Niech $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem zbiorów.

1. Pokaż, że $x \in \liminf_{n \in \mathbb{N}} F_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\forall^\infty n)(x \in F_n)$ oraz $x \in \limsup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\exists^\infty n)(x \in F_n)$ (patrz Zadanie 58).
2. Korzystając z powyższych obserwacji udowodnij, że
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \subseteq \liminf_{n \in \mathbb{N}} F_n \subseteq \limsup_{n \in \mathbb{N}} F_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n .$$
3. Podaj przykład ciągu zbiorów $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dla którego wszystkie inkluzje w powyższym wzorze są właściwe.

## Zadanie 85

Ustalmy zbiory $A$, $B$ i $C$. Niech $A_{3n} = A$, $A_{3n+1} = B$ oraz $A_{3n+2} = C$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz $\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Kiedy ciąg $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny?

## Zadanie 86

Niech $(A_{(i,j)})_{(i,j) \in I \times J}$ będzie dowolną indeksowaną rodziną zbiorów. Pokaż, że
$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{f \in J^I} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}.$$

## Zadanie 87

Załóżmy, że $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest rodziną zbiorów parami rozłącznych. Pokaż, że wtedy $\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

## Zadanie 88

Załóżmy, że $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest malejącą rodziną zbiorów, czyli, że $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ oraz, że $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Pokaż, że wtedy
$$A_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus A_{n+1}).$$

### * Zadanie 89

Funkcję logiczną $f$ nazywamy nazywamy monotoniczną jeśli zmiana dowolnego argumentu z $\mathbb{0}$ na $\mathbb{1}$ nie powoduje zmiany wartości funkcji z $\mathbb{1}$ na $\mathbb{0}$. Pokaż, że jeśli $f$ jest monotoniczną funkcją logiczną, to jest ona funkcją stałą lub może zostać przedstawiona jako formuła zbudowana wyłącznie ze zmiennych oraz spójników $\wedge$ i $\vee$.

### * Zadanie 90

Na przyjęciu jest sześć osób. Pokaż, że jest trójka osób znajomych lub, że jest trójka osób którzy się nie znają (uwaga: zakładamy, że jeśli osoba A zna osobę B, to i osoba B zna osobę A).

## R5: Relacje równoważności

### Zadanie 91

Na zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ określamy relację $x \approx y \leftrightarrow (x - y \in \mathbb{Z})$.

1. Pokaż, że $\approx$ jest relacją równoważności
2. Wyznacz klasę abstrakcji $[\sqrt{2}]_{\approx}$.
3. Opisz klasę abstrakcji dowolnego elementu $a \in \mathbb{R}$.
4. Spróbuj samodzielnie uogólnić to zadanie.

### Zadanie 92

Dla $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in [0, 1]^2$ określamy relację

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \leftrightarrow u(x_1) = u(y_1) \wedge u(x_2) = u(y_2),$$

gdzie $u(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

1. Pokaż, że $\sim$ jest relacją równoważności.
2. Wyznacz jej klasy abstrakcji.

### Zadanie 93

Pokaż, że następujące relacje są relacjami równoważności na zbiorze $X$ i wyznacz ich klasy abstrakcji:

1. $X = \mathbb{N}^2$; $(x, y) \approx (a, b) \leftrightarrow x + y = a + b$,
2. $X = \mathbb{N}^2$; $(x, y) \approx (a, b) \leftrightarrow \max\{x, y\} = \max\{a, b\}$,
3. $X = \mathbb{R}$; $x \approx y \leftrightarrow (\exists t \neq 0)(tx = y)$,
4. $X = \mathbb{R}$; $x \approx y \leftrightarrow (\exists t > 0)(tx = y)$,
5. $X = \mathbb{R}^2$; $x \approx y \leftrightarrow (\exists t \neq 0)(tx = y)$,
6. $X = \mathbb{R}^2$; $x \approx y \leftrightarrow (\exists t > 0)(tx = y)$.

### Zadanie 94

Jaka jest najmniejsza w sensie inkluzji relacja równoważności n zbiorze $X$? Jaka jest największa w sensie inkluzji relacja równoważności n zbiorze $X$?

### Zadanie 95

Ile jest relacji równoważności na zbiorze $\{1, 2, 3\}$? Ile jest różnych rozbić zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$?

### Zadanie 96

Na zbiorze $[0,8)^2$ określamy następującą relację równoważności

$$(a,b) \approx (c,d) \leftrightarrow [a] = [c] \wedge [b] = [d],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Niech

$$T = \{(n,m) \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}^2 : 2|n+m\}.$$

Narysuj zbiór

$$\bigcup_{(n,m)\in T} [(n,m)]_{\approx}.$$

### Zadanie 97

Na zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ określamy relacje $x \equiv y \leftrightarrow 3|(x+2y)$ oraz $x \simeq y \leftrightarrow 5|x^2 - y^2$. Czy są to relacje równoważności?

### Zadanie 98

Na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ określamy relacją równoważności $\approx$ formułą

$$(x,y) \approx (x',y') \leftrightarrow \max\{x,y\} = \max\{x',y'\}\ .$$

Ile elementów ma klasa abstrakcji $[(0,20)]_{\approx}$?

### Zadanie 99

Niech $\mathcal{G} = (G,\cdot)$ będzie grupą oraz niech $H \subseteq G$ będzie podgrupą grupy $\mathcal{G}$. Na zbiorze $G$ określamy relację $\sim_H$ wzorem

$$x \sim_H y \leftrightarrow xy^{-1} \in H.$$

Pokaż, że $\sim_H$ jest relacją równoważności. Opisz jej klasy abstrakcji.

### Zadanie 100

Pokaż, że jeśli $R$ i $S$ są relacjami równoważności na zbiorze $\Omega$, to również $R \cap S$ jest relacją równoważności na zbiorze $\Omega$. Opisz klasy abstrakcji relacji $R \cap S$.

### Zadanie 101

Pokaż, że przekrój dowolnej rodziny relacji równoważności na zbiorze $X$ jest również relacją równoważności na zbiorze $X$.

### Zadanie 102

Na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ określamy relacje $R$ i $S$ wzorami

$$(n,m)R(n',m') \leftrightarrow n = n'$$

oraz

$$(n,m)S(n',m') \leftrightarrow m = m'\ .$$

Wyznacz najmniejszą relację równoważności zawierającą relację $R \cup S$.

## R6: Częściowe porządki

## Zadanie 103

Pokaż, że $(\mathbb{N}\setminus\{0\}, |)$ jest częściowym porządkiem. Znajdź w nim element najmniejszy. Znajdź elementy minimalne w częściowym porządku $(\mathbb{N} \setminus \{0,1\}, |)$.

## Zadanie 104

Na zbiorze $X = \{10, 11, \ldots, 30\}$ określamy relację $(x \preceq y) \leftrightarrow (x|y)$. Wyznacz elementy maksymalne i minimalne w częściowym porządku $(X, \preceq)$.

## Zadanie 105

Pokaż, że jeśli w częściowym porządku istnieje element największy, to jest on jedynym elementem największym i jest elementem maksymalnym.

## Zadanie 106

Pokaż, że jeśli $R$ i $S$ sa częściowymi porządkami, to ich przekrój $R \cap S$ też jest częściowym porządkiem. Czy ich suma $R \cup S$ musi być częściowym porządkiem?

## Zadanie 107

Niech $R$ będzie częściowym porządkiem na zbiorze $X$. Niech $Y \subseteq X$ oraz $S = R \cap (Y \times Y)$. Pokaż, że $S$ jest częściowym porządkiem na zbiorze $Y$.

## Zadanie 108

Dla danych liczb $n, m \in \mathbb{N}$ podaj przykład częściowego porządku który ma dokładnie $n$ elementów minimalnych oraz $m$ elementów maksymalnych.

## Zadanie 109

Podaj przykład częściowego porządku który ma dokładnie jeden element maksymalny oraz nie ma elementu największego.

## Zadanie 110

Niech $(X, R)$ będzie częściowym porządkiem. Pokaż, że relacja $R^{-1}$ jest również częściowym porządkiem na zbiorze $X$. Jakie są związki pomiędzy elementami maksymalnymi, minimalnymi, największymi i najmniejszymi w tych dwóch częściowych porządkach?

## Zadanie 111

Niech $(X, \preceq)$ będzie liniowym porządkiem. Pokaż, że jeśli $a \in X$ jest elementem $\preceq$–maksymalnym, to $a$ jest również elementem $\preceq$–największym.

## Zadanie 112

Pokaż, że nie istnieje liniowy porządek $\preceq$ na zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$ o następujących własnościach:

1. $(\forall a, b, x, y \in \mathbb{C})\,((a \preceq b) \wedge (x \preceq y) \to a + x \preceq b + y)$,
2. $(\forall a, b \in \mathbb{C})((0 \preceq a) \wedge (0 \preceq b) \to 0 \preceq a \cdot b)$.

## Zadanie 113

Niech $A$ będzie dowolnym niepustym zbiorem. Pokaż, że porządki $(P(A), \subseteq)$ i $(\{0,1\}^A, \leqslant^*)$, gdzie $f \leqslant^* g \leftrightarrow (\forall a \in A)(f(a) \leqslant g(a))$, są izomorficzne.

## Zadanie 114

Na zbiorze $\mathbb{R}^2$ rozważamy relację $\preceq$ zadaną formułą

$$((x,y) \preceq (x'y')) \leftrightarrow (x \leqslant x') \wedge (y \leqslant y') .$$

Niech $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

1. Pokaż, że relacja $\preceq$ jest częściowym porządkiem.
2. Wyznacz elementy minimalne zbioru $K$.
3. Dla ustalonego punktu $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ wyznacz zbiory $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (a,b) \leqslant (x,y)\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \leqslant (a,b)\}$ oraz $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \neg((a,b) \leqslant (x,y)) \wedge \neg((x,y) \leqslant (a,b))\}$.

## Zadanie 115

Niech $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \leqslant 1\}$. Na zbiorze $K$ określamy relację

$$(x,y) \preceq (x',y') \leftrightarrow ((x < x') \vee (x = x' \wedge y \leqslant y')) .$$

Pokaż, że $\preceq$ jest liniowym porządkiem na zbiorze $K$ oraz wyznacz elementy minimalne w tym porządku.

## Zadanie 116

Rozważmy częściowy porządek $(\mathbb{R}, \leqslant)$. Niech $A, B \subseteq \mathbb{R}$ będą zbiorami ograniczonymi. Pokaż, że $\inf(A) = -\sup(\{-a : a \in A\})$ oraz $\sup(\{a+b : a \in A \wedge b \in B\}) = \sup(A) + \sup(B)$.

## Zadanie 117

Niech $\Omega = \{a,b\}$ oraz niech $X$ będzie zbiorem wszystkich słów z $\Omega^*$ długości nie większej niż 3. Wypisz elementy tego zbioru w porządku leksykograficznym.

## Zadanie 118

Niech $\Omega$ będzie niepustym zbiorem. Na zbiorze słów $\Omega^*$ definiujemy relację $\sigma \approx \eta \leftrightarrow |\sigma| = |\eta|$, gdzie $|x|$ oznacza długość słowa $x$. Pokaż, że $\approx$ jest relacją równoważności. Wyznacz jej klasy abstrakcji.

## Zadanie 119

Pokaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ istnieje zbiór liczb naturalnych $T$ taki, że częściowe porządki $(P(\{1,..,n\}), \subseteq)$ oraz $(T, |)$ są izomorficzne

## Zadanie 120

Niech $L_1$ oznacza zbiór wszystkich zdań zbudowanych z jednej zmiennej zdaniowej $p$. Na zbiorze $L_1$ określamy relację $\varphi \leqslant \psi \leftrightarrow \models (\varphi \to \psi)$. Pokaż, że $\leqslant$ jest preporządkiem. Niech $\equiv$ będzie relacją równoważności wyznaczoną przez ten preporządek oraz niech $\preceq$ będzie częściowym porządkiem na $L_1/\equiv$ wyznaczonym przez $\leqslant$. Pokaż, że porządek $(L_1/\equiv, \leqslant)$ jest izomorficzny z porządkiem $\mathcal{P}(\{0,1\})$.

## * Zadanie 121

Załóżmy, że $(X, \leqslant)$ jest dobrym porządkiem o następujących własnościach: nie ma w nim elementu największego, dla każdego elementu, z wyjątkiem najmniejszego, istnieje element bezpośrednio go poprzedzający. Pokaż, że porządek $(X, \leqslant)$ jest izomorficzny z liczbami naturalnymi z naturalnym porządkiem.

### * Zadanie 122

Załóżmy, że $f : A \to B$ jest surjekcją. Pokaż, korzystając z Aksjomatu Wyboru, że istnieje taka funkcja $g : B \to A$, że $(\forall y \in B)(f(g(y)) = y)$.

### Zadanie 123

Niech $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczb naturalnych. Pokaż, że istnieją liczby $n, m \in \mathbb{N}$ takie, że $n < m$ oraz $x_n \leqslant x_m$ i $y_n \leqslant y_m$.

### Zadanie 124

Podaj przykład injekcji $f : \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$.

## R7: Aksjomat Wyboru

### Zadanie 125

Na zbiorze $X = \mathbb{R}^2$ rozważamy relację równoważności określoną wzorem $x \approx y \leftrightarrow (\exists t \neq 0)(tx = y)$ (patrz Zadanie 93). Znajdź jakiś naturalny (prosty do opisania) selektor rodziny $X/\approx$.

### Zadanie 126

Na zbiorze $\mathbb{R}$ rozważamy relację określoną wzorem $x \approx y \leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Pokaż, że jest to relacja równoważności oraz znajdź jakiś naturalny selektor rodziny $\mathbb{R}/\approx$.

### Zadanie 127

W którym momencie dowodu równoważności definicji Heinego i Cauchy'ego ciągłości funkcji korzystamy z Aksjomatu Wyboru?

### ** Zadanie 128

Pokaż, że w każdej przestrzeni liniowej istnieje baza.
Wskazówka: skorzystaj z Lematu Kuratowskiego Zorna.

### Zadanie 129

Znajdź liniowy porządek $\preceq$ na zbiorze $\mathrm{P}(\{a,b,c\})$ taki, że

$$(\forall X, Y \in \mathrm{P}(\{a,b,c\}))(X \subseteq Y \to X \preceq Y) .$$

### ** Zadanie 130

Pokaż, korzystając z Lematu Kuratowskiego-Zorna, że każdy częściowy porządek można rozszerzyć do porządku liniowego.

### Zadanie 131

Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną niepustych, parami rozłącznych podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Pokaż, bez pomocy Aksjomatu Wyboru, że rodzina $\mathcal{A}$ ma selektor.

## R8: Indukcja Matematyczna

### Zadanie 132

Wyznacz moc zbioru $A = \{k \in \{1, \dots, 1000\} : 2|k \vee 5|k\}$.

### Zadanie 133

Uogólnij wzór $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ na trzy i cztery zbiory.

### * Zadanie 134

Uogólnij wzór $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ na dowolną skończoną ilość zbiorów.

### Zadanie 135

Niech $\mathcal{A} = \{A \in P(\{1, \dots, 10\}) : 2 \leqslant |A| \leqslant 7\}$. Ile jest elementów minimalnych oraz ile jest elementów maksymalnych w częściowym porządku $(\mathcal{A}, \subseteq)$?

### Zadanie 136

Pokaż, że w każdym skończonym częściowym porządku istnieje element maksymalny.

### Zadanie 137

Pokaż, że jeśli skończony porządek ma tylko jeden element maksymalny, to jest on elementem największym.

### Zadanie 138

Pokaż za pomocą indukcji matematycznej, że każdy skończony porządek można rozszerzyć do porządku liniowego. Podaj oszacowania na liczbę tych rozszerzeń.

### Zadanie 139

Niech $A = \{1, \dots, n\} \times \{0, 1\}$ oraz $R = \{((x, 0), (x, 1) : 1 \leqslant x \leqslant n\} \cup id_A$. Na ile sposobów można rozszerzyć relację $R$ do liniowego porządku?

### Zadanie 140

Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona wyznacz następujące sumy:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}, \ \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}, \ \sum_{i=0}^{n} 2^i \binom{n}{i}, \ \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} .$$

Wskazówka: Do wyznaczenia ostatniej sumy możesz skorzystać z tego, że $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$.

### Zadanie 141

Za pomocą formuły Stirlinga $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ oszacuj liczbę $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby $x$.

### Zadanie 142

Pokaż, że jeśli $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ jest injekcją, to funkcja $f$ jest również surjekcją. Pokaż, że jeśli $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ jest surjekcją, to funkcja $f$ jest również injekcją.

### Zadanie 143

Ile jest waluacji $\pi : \{p_0, p_1, \dots, p_{10}\} \to \{0, 1\}$ takich, że $\pi \models p_0 \to (p_1 \wedge \dots \wedge p_{10})$ ?

### Zadanie 144

Wyznacz liczbę przekątnych w $n$-kącie wypukłym.

## Zadanie 145

Ile jest relacji zwrotnych, symetrycznych, słabo antysymetrycznych na zbiorze $n$ elementowym?

## Zadanie 146

Ile jest relacji które są jednocześnie zwrotne i symetryczne na zbiorze $\{1, 2, ..., n\}$?

## Zadanie 147

Relację $R$ nazywamy *antysymetryczną*, jeśli

$$(\forall x, y)((x, y) \in R \to (x, y) \notin R) \ .$$

Ile jest relacji antysymetrycznych na zbiorze n - elementowym?

## Zadanie 148

Relację $R$ nazywamy *żałosną*, jeśli

$$(\forall x, y)((x, y) \in R \to x = y) \ .$$

Ile jest relacji żałosnych na zbiorze n - elementowym?

## Zadanie 149

Niech $S = \{X \subseteq \{1, ..., 9\} : 2||X|\}$. Jaka jest moc rodziny zbiorów $S$ ?

## Zadanie 150

Pokaż, że jeśli w trójkącie równobocznym o boku 2 rozmieścimy dowolnie pięć punktów, to dwa z nich są odległe nie więcej niż o 1.
Wskazówka: Zastosuj zasadę szufladkową Dirichleta.

## Zadanie 151

Pokaż, że w każdej szóstce liczb ze zbioru $\{1, ..., 10\}$ istnieją dwie liczby których suma jest nieparzysta.
Wskazówka: Przyjrzyj się rozbiciu $\{1, ..., 10\} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

## Zadanie 152

Niech $x_1, \ldots, x_n$ będzie ciągiem liczb całkowitych. Pokaż, że suma pewnej liczby kolejnych wyrazów tego ciągu jest podzielna przez liczbę $n$.
Wskazówka: Rozważ liczby $s_k = (x_1 + \ldots + x_k) \mod n.$ .

## Zadanie 153

Czy szachownicę z usuniętymi naprzeciwległymi narożnikami można pokryć kostkami domina o powierzchni równej dwóm kwadratom szachownicy?
Wskazówka: Pomaluj rozsądnie szachownicę.

## Zadanie 154

Pokaż, że istnieje potęga liczby 3, której rozwinięcie dziesiętne kończy się cyframi 001.
Wskazówka: Rozważ ciąg liczb $a_n = 3^n \mod 10^3$.

## Zadanie 155

Niech $A \subseteq \{1, 2, ..., 2n\}$ będzie zbiorem o mocy $|A| > n$. Pokaż, że istnieją dwie różne liczby $a, b \in A$ takie, że $a$ dzieli $b$.
Wskazówka: Rozważ funkcję $f(x) = \max\{k : k|x \wedge \neg(2|k)\}$.

### ** Zadanie 156 (*Erdős–Szekeres*)

Niech $x_1, \ldots, x_{mn+1}$ będzie ciągiem różnych liczb rzeczywistych. Pokaż, że z ciągu tego można wybrać podciąg rosnący długości $m + 1$ lub podciąg malejący długości $n + 1$.
Wskazówka: Każdej liczbie $k \in \{1, \ldots, nm + 1\}$ przyporządkuj parę liczb $(a_k, b_k)$, gdzie $a_k$ = długość najdłuższego rosnącego podciągu kończącego się w $x_k$ zaś $b_k$ = długość najdłuższego malejącego podciągu kończącego się w $x_k$ .

### Zadanie 157

Niech $\mathcal{A}$ będzie skończoną rodziną niepustych, parami rozłącznych zbiorów. Pokaż, bez pomocy Aksjomatu Wyboru, że rodzina $\mathcal{A}$ ma selektor.

### Zadanie 158

Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ będzie skończoną rodziną niepustych, parami rozłącznych skończonych zbiorów. Wyznacz moc zbioru wszystkich selektorów rodziny $\mathcal{A}$.

### Zadanie 159

Pokaż, że dowolne dwa skończone liniowe porządki o tej samej liczbie elementów są izomorficzne.

### Zadanie 160

Pokaż, że dowolne dwa skończone liniowe porządki o tej samej liczbie elementów są izomorficzne.

### Zadanie 161

Załóżmy, że każdy punkt płaszczyzny jest pomalowany kolorem czerwonym lub niebieskim. Pokaż, że istnieją dwa różne punkty odległe o siebie o 1 które są pokolorowane tym samym kolorem.

## R9: Rekursja

### Zadanie 162

Załóżmy że $r \subseteq X \times X$, $(Y, \preceq)$ jest dobrym porządkiem oraz, że istnieje funkcja $f : X \to Y$ taka, że

$$(\forall x_1, x_2)((x_1, x_2) \in r \to f(x) \prec f(x_2)) \, .$$

Pokaż, że $r$ jest relacją ufundowaną.

### Zadanie 163

Na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ określamy relację

$$(f, g) \in r \leftrightarrow (\forall i \in \mathbb{N})(f(i) = g(i + 1)) \, .$$

Czy relacja $r$ jest ufundowana?

### Zadanie 164

Podaj rekurencyjne definicje następujących funkcji:

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \to 2^n$
2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \to n!$
3. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (a, b) \to a^b$

4. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (a, b) \to \binom{a}{b}$

### Zadanie 165

Listę pustą oznaczamy symbolem `[]`. Symbolem `a:as` oznaczamy listę o pierwszym elemencie `a` i ogonie `as`. Napisz rekurencyjne definicji następujących funkcji:

1. $f : A^* \to \mathbb{N}$, która wylicza długość listy
2. konkatenację $(++) : A^* \times A^* \to A^*$ dwóch list

### Zadanie 166

Napisz rekurencyjną definicję funkcji `take n xs`, która pobiera pierwsze `n` elementów listy `xs`.

### Zadanie 167

Napisz rekurencyjną definicję funkcji `reverse` odwracającą kolejność elementów łańcucha. Dobrze by było aby działała ona w czasie proporcjonalnym do długości łańcucha.

### Zadanie 168

### Zadanie 169

### Zadanie 170

## R10: Teoria mocy

### Zadanie 171

Pokaż za pomocą indukcji matematycznej, że $n < 2^n$ dla każdej liczby naturalnej $n$. Udowodnij ten sam fakt bez korzystanie z indukcji matematycznej.

### Zadanie 172

Znajdź bijekcję pomiędzy następującymi parami zbiorów:

1. $(-\pi/2, \pi/2)$ i $\mathbb{R}$,
2. $(0, 1)$ i $(2, 5)$,
3. $(0, \infty)$ i $\mathbb{R}$,
4. $[0, 1]$ i $[0, 1)$.

### Zadanie 173

Pokaż, że każdy niezdegenerowany odcinek prostej rzeczywistej jest mocy continuum. Pokaż, że każdy niezdegenerowany trójkąt na płaszczyźnie jest mocy continuum.

### Zadanie 174

Niech $\mathrm{Sym}(A)$ oznacza zbiór wszystkich permutacji zbioru $A$. Pokaż, że jeśli $|A| = |B|$ to $|\mathrm{Sym}(A)| = |\mathrm{Sym}(B)|$.

### Zadanie 175

Pokaż, że zbiór punktów płaszczyzny o obu współrzędnych wymiernych jest zbiorem przeliczalnym.

## Zadanie 176

Pokaż, że dowolna rodzina parami rozłącznych odcinków liczb rzeczywistych jest przeliczalna.
Wskazówka: Skorzystaj z tego, że liczby wymierne są gęste w zbiorze liczb rzeczywistych oraz, że zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny.

## Zadanie 177

Pokaż, że dowolna rodzina parami rozłącznych niepustych kółek na płaszczyźnie jest przeliczalna.

## Zadanie 178

Pokaż, że $n \cdot \aleph_0 = (\aleph_0)^n = \aleph_0$ dla każdej liczby naturalnej $n > 0$. Wyznacz liczbę $\aleph_0^{\aleph_0}$.

## Zadanie 179

Jaka jest moc zbioru wszystkich ciągów liczb rzeczywistych zbieżnych do zera? Jaka jest moc zbioru wszystkich ciągów liczb całkowitych zbieżnych do zera?

## Zadanie 180

Pokaż, że zbiór wszystkich funkcji ciągłych z liczb rzeczywistych w liczby rzeczywiste jest mocy continuum.
Wskazówka: Pokaż, że jeśli $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są takimi funkcjami ciągłymi, że $f \restriction \mathbb{Q} = g \restriction \mathbb{Q}$ to $f = g$.

## Zadanie 181

Pokaż, że zbiór wszystkich bijekcji ze zbioru liczb naturalnych w zbiór liczb naturalnych jest mocy continuum.

## Zadanie 182

Jaka może być moc zbioru $A \setminus B$ jeśli $A$ i $B$ są zbiorami mocy $\aleph_0$? Jaka może być moc zbioru $A \setminus B$ jeśli $A$ i $B$ są zbiorami mocy $\mathbf{c}$?

## Zadanie 183

Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pokaż, że $|\mathrm{rng}(f)| = \aleph_0$ lub istnieje taka liczba naturalna $n$, że $|f^{-1}(n)| = \aleph_0$.

## Zadanie 184

Jaka jest moc zbioru $\{X \subset \mathbb{N} : |X| < \aleph_0\}$? Jaka jest moc zbioru $\{X \subset \mathbb{R} : |X| < \aleph_0\}$? Jaka jest moc zbioru $\{X \subset \mathbb{R} : |X| \leqslant \aleph_0\}$?

## * Zadanie 185

Oblicz $\kappa + \lambda$, $\kappa * \lambda$ oraz $\kappa^\lambda$ dla dowolnych $\kappa, \lambda \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0, \mathfrak{c}, 2^{\mathfrak{c}}\}$.

## Zadanie 186

Niech $\beth_0 = \aleph_0$ oraz $\beth_{n+1} = 2^{\beth_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

1. Pokaż, że $\beth_0 < \beth_1 < \beth_2 < \ldots$
2. Niech $\beth_\omega = \sum_{n \geqslant 0} \beth_n$. Pokaż, że

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\beth_n < \beth_\omega) \, .$$

3. Spróbuj zdefiniować samodzielnie liczby $\beth_{\omega+1}, \beth_{\omega+2}, \ldots, \beth_{\omega+\omega}$

### * Zadanie 187

Jaka jest moc zbioru $\{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$?
Wskazówka: Zapoznaj się z pojęciem "pierwotnych trójek pitagorejskich".

### * Zadanie 188

Ile można narysować parami rozłącznych liter "L" na płaszczyźnie?. Ile można narysować parami rozłącznych liter "T" na płaszczyźnie?

### * Zadanie 189

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją monotoniczna. Pokaż, że zbiór punktów nieciągłości funkcji f jest przeliczalny.

Wskazówka: Oznacz przez $T$ zbiór punktów nieciągłości funkcji $f$ i rozważ rodzinę odcinków

$$I_t = (\lim_{x \to t-} f(x), \lim_{x \to t+} f(x))$$

dla $t \in T$.

### *** Zadanie 190 (*Cantor*)

Liniowy porządek $(L, \leqslant)$ nazywamy gęstym, jeśli

$$(\forall a, b \in L)(a < b \to (\exists c \in L)(a < c < b)).$$

Pokaż, że każdy przeliczalny liniowy gęsty porządek bez elementu największego i najmniejszego jest izomorficzny z porządkiem $(\mathbb{Q}, \leqslant)$.

### ** Zadanie 191 (*Sierpinski*)

Niech $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolną rodziną zbiorów mocy $\aleph_0$. Pokaż, że istnieje rodzina nieskończonych, parami rozłącznych zbiorów $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taka, że $B_n \subseteq A_n$ dla wszystkich $n$.
Uwaga: Prawdziwa jest pewien wariant tego twierdzenia dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej.

### ** Zadanie 192

Niech $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolną rodziną nieskończonych podzbiorów zbiorów $\mathbb{N}$. Pokaż, że istnieje taki podzbiór $S$ zbioru $\mathbb{N}$, że

$$(\forall n \in \mathbb{N})(|A_n \cap S| = |A_n \setminus S| = \aleph_0).$$

### * Zadanie 193

Niech $\{f_n : n \in N\}$ będzie dowolną rodziną funkcji ze zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Znajdź taką funkcję $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taką, że $(\forall n)(\forall^\infty k)(f_n(k) < g(k))$ (kwantyfikator $\forall^\infty$ został zdefiniowany w zadaniu 58).

### * Zadanie 194

Dla zbiorów $A, B \in P(\mathbb{N})$ określamy relację

$$A \subseteq^* B \leftrightarrow |A \setminus B| < \aleph_0 .$$

Pokaż, że $\subseteq^*$ jest preporządkiem. Załóżmy, że $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest taką rodziną nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$, że $(\forall n \in \mathbb{N})(A_{n+1} \subseteq^* A_n)$. Pokaż, że istnieje taki nieskończony podzbiór $B$ zbioru liczb naturalnych, że $(\forall n \in \mathbb{N})(B \subseteq^* A_n)$.

### ** Zadanie 195

Pokaż, że istnieje rodzina $\mathcal{A}$ nieskończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych mocy continuum taka, że dla dowolnych dwóch różnych $A, B \in \mathcal{A}$ przekrój $A \cap B$ jest skończony.
Wskazówka: Skorzystaj z tego, że zbiór liczb wymiernych jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

### * Zadanie 196

Pokaż, korzystając z Aksjomatu Wyboru, że jeśli $A$ jest zbiorem nieskończonym (czyli, że $(\forall n \in \mathbb{N})(\neg|A| = n)$), to istnieje injekcja $f : \mathbb{N} \to A$.

### *** Zadanie 197 (*Ramsey*)

Niech $R \subseteq \mathbb{N}^2$ będzie relacją symetryczną. Pokaż, że istnieje nieskończony podzbiór $A$ zbioru $\mathbb{N}$ taki, że $(\forall x, y \in A)(x \neq y \to (x, y) \in R)$ lub istnieje nieskończony podzbiór $A$ zbioru $\mathbb{N}$ taki, że $(\forall x, y \in A)(x \neq y \to (x, y) \notin R)$.

### Zadanie 198

Pokaż, że z każdego nieskończonego ciągu liczb rzeczywistych można wybrać nieskończony podciąg monotoniczny.

## R11: Elementy Teorii Kategorii

### Zadanie 199

Które z następujących struktur są monoidami?

1. $([0, 1], 0, \vee)$, gdzie $x \vee y = \max\{x, y\}$
2. $([0, 1], 1, \wedge)$, gdzie $x \wedge y = \min\{x, y\}$
3. $((0, \infty), 1, \star)$, gdzie $x \star y = x^y$
4. $(X^X, \mathrm{Id}_x, \circ)$ ($X$ jest ustalonym zbiorem)
5. $(X^*, [], ++)$, (gdzie $X$ jest ustalonym zbiorem)

### Zadanie 200

Pokaż, że strzałka $\mathrm{Id}_A$ jest jednoznaczna, czyli, że jeśli $\mathrm{Id1}_A$ oraz $\mathrm{Id2}_A$ spełniają własności identyczności to $\mathrm{Id1}_A = \mathrm{Id2}_A$.

### Zadanie 201

Pokaż, że złożenie monomorfizmów jest monomorfizmem.

### Zadanie 202

Pokaż, że złożenie epimorfizmów jest epimorfizmem. Spróbuj podać proste uzasadnienie tego faktu oparte o poprzednie zadanie wykorzystujące pojęcie kategorii dualnej.

### Zadanie 203

Pokaż, że jeśli $f : A \to B$ jest izomorfizmem, to odwrotność $f^{-1}$ jest wyznaczona jednoznacznie.

### Zadanie 204

Pokaż, że jeśli $f^{-1}$ jest odwrotnością $f : A \to B$ i $g^{-1}$ jest odwrotnością $g : B \to C$, to $f^{-1} \circ g^{-1}$ jest odwrotnością $g \circ f : A \to C$.

## Zadanie 205

Podaj przykład kategorii ze strzałką która jest monomorfizmem oraz epimorfizmem, ale nie jest izomorfizmem.

## Zadanie 206

Rozważamy kategorię zbudowaną z częściowego porządku $(X, \leqslant)$. Kiedy istnieją w niej elementy początkowe i końcowe?

## Zadanie 207

Pokaż, że jeśli w diagramie

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

komutują wewnętrzne kwadraty, to również komutuje zewnętrzny kwadrat.

## Zadanie 208

Zinterpretuj w języku informatyki komutowanie następującego diagramu

$$\begin{array}{ccc} Int & \xrightarrow{succ_{Int}} & Int \\ {\scriptstyle toReal}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle toReal} \\ Real & \xrightarrow[succ_{Real}]{} & Real \end{array}$$

## Zadanie 209

Pokaż, że obiekty końcowe (terminalne) w ustalonej kategorii są wyrażone jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Pokaż podobną własność obiektów początkowych.

## Zadanie 210

Wyznacz obiekty końcowe i początkowe w następujących kategoriach:

1. w kategorii grup $\mathbf{Grp}$
2. w kategorii ciał
3. w kategorii częściowych porządków $\mathbf{Pos}$
4. w kategorii monoidów $\mathbf{Mon}$
5. $\mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$
6. $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$

## Zadanie 211

Pokaż, że produkt $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu w kategorii $\mathbf{Set}$.
Wskazówka: Skorzystaj z jednoznaczności mediatora w definicji produktu.

## Zadanie 212

Pokaż, że jeśli $\mathcal{C}$ jest kategorią, to $\mathcal{C}^{op}$ też jest kategorią.
Wskazówka: Jak w kategorii $\mathcal{C}^{op}$ definiuje się złożenie morfizmów?.

## Zadanie 213

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Na zbiorze $G$ określamy działanie $a \star b = b \cdot a$

1. Pokaż, że $(G\star)$ jest grupą.
2. Znajdź izomorfizm między grupami $(G, \cdot)$ oraz $(G, \star)$.
3. Jaki ma związek to zadanie z konstrukcją $\mathcal{C}^{op}$?

## Zadanie 214

Zapisz w języku diagramów komutujących (przemiennych) łączność operacji złożenia funkcji.

## Zadanie 215

Niech $(G, \cdot)$, $(H, \star)$ będą grupami oraz niech $f : G \to H$ będzie homomorfizmem. Wiadomo, że grupa ilorazowa $G/\text{ker}(f)$ jest izomorficzna z podgrupą $\text{img}(f)$ grupy $H$. Zapisz to w języku przemiennych diagramów.

## Zadanie 216

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią z produktem. Dla $f : X \to A$ oraz $g : Y \to B$ niech $\langle f, g\rangle$ będzie strzałką mediacyjną dla produktu $A \times B$. Pokaż, że $\langle f \circ h, g \circ h\rangle = \langle f, g\rangle \circ h$.

## ** Zadanie 217

Rozważamy kategorię $\mathbf{Mon}$ (monoidów). Pokaż, że funkcja $f : (\mathbb{N}, 0, +) \to (\mathbb{Z}, +, +)$ określona wzorem $f(x) = x$ (czyli identyczność na $\mathbb{N}$ traktowana jako morfizm z $(\mathbb{N}, 0, +)$ do $(\mathbb{Z}, 0, +)$) jest epimorfizmem.

## Zadanie 218

Ustalmy zbiór $\Omega$. Rozważmy kategorię $\mathcal{P}(\Omega)$ której obiektami są wszystkie podzbiory zbioru $\Omega$, zaś morfizmy oznaczają zawieranie zbiorów. Niech $A, B \subseteq \Omega$.

1. Wyznacz $A \times B$ w tej kategorii
2. Wyznacz $A + B$ w tej kategorii.

## * Zadanie 219

Rozważmy takie przyporządkowanie $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$

$$F(X) = \begin{cases} \emptyset & : |X| < \aleph_0 \\ \mathbb{N} & : |X| \geqslant \aleph_0 \end{cases}$$

Pokaż, że $F$ nie można rozszerzyć do funktora.

## * Zadanie 220

Sprawdź, że następujące przyporządkowania są endofunktorami kategorii $\mathbf{Set}$ oraz zaproponuj dla nich odwzorowania $\eta_X : X \to F(X)$ i $\mu_X : F(F(X)) \to F(X)$:

1. $F(X) = X \times X$; $F(f : X \to Y)(x, y) = (f(x), f(y)$
2. (Reader) $R_A(X) = X^A$; $R(f : X \to Y)(\phi) = f \circ \phi$
3. (Writer) $W_\mathcal{M}(X) = M \times X$; $W_\mathcal{M}(f : X \to Y) = id_M \times f$, gdzie $\mathcal{M} = (M, e, \star)$ jest ustalonym monoidem
4. (State) $S_A(X) = (A \times X)^A$; $S_A(f : X \to Y)(\phi) = (\lambda a)(\text{let } (b, y) = \phi(a) \text{ in } (b, f(y)))$
5. (Maybe) $M(X) = X \cup \{\uparrow_X\}$; $F(f : X \to Y) = f \cup \{(\uparrow_X, \uparrow_Y)\}$
6. (Niedeterminizm) $N(X) = \{Y \subseteq X : |Y| < \aleph_0\}$; $N(f : X \to Y)(A) = f[A]$

Odwzorowania $\eta$ oraz $\mu$ muszą posiadać te same własności co ich odpowiedniki dla funktora `List`, czyli $\mu_X \circ \eta_{F(X)} = id_{F(X)}$, $\mu_X \circ F(\eta_X) = id_{F(X)}$ oraz $\mu_X \circ \mu_{F(X)} = \mu \circ F(\mu)$.

### Zadanie 221

Niech `mmap f = map (map f)` oraz `mmmap f = map (map (map f))`.

1. Zbadaj typy tych odwzorowań.
2. Przetestuj ich działanie
3. Pokaż, że `mmap = map . map` oraz `mmmap = map . map . map`

## R12: Elementy Teorii Modeli

### Zadanie 222

Wyznacz wartość termu $\tau = 1+(1+(1+(1+1)))$ w pierścieniach $\mathbb{Z}_n$ dla dowolnego $n \geqslant 1$.

### Zadanie 223

Czy $(\mathbb{N}, \leqslant) \equiv (\mathbb{Z}, \leqslant)$?

### Zadanie 224

Niech $Th(\mathfrak{a}) = \{\phi \in Sent : \mathfrak{a} \models \phi\}$. Pokaż, że $Th(\mathfrak{a})$ jest teorią niesprzeczną i zupełną.

### Zadanie 225

Znajdź zdania $\phi_n$ i $\psi_n$ takie, że

1. $\phi_n$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy gdy model ma moc większą lub równą $n$,
2. $\psi_n$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy gdy model ma moc równą $n$.

### Zadanie 226

Pokaż, że jeśli dwie struktury są izomorficzne, to są elementarnie równoważne.

### Zadanie 227

Pokaż, że

1. $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}$,
2. $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \to \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}$,
3. $(\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}) \land (\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{c}) \to (\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{c})$

### Zadanie 228

Niech $PO$ oznacza teorię częściowych porządków z predykatem binarnym $R$.

1. Pokaż, że $PO \models (\forall x)((\forall y)(R(y,x) \to (\forall y)(R(x,y) \to y = x))$
2. Niech $\phi = (\forall x,y)(R(x,y) \lor R(y,x))$. Pokaż, że zdanie $\phi$ jest niezależne od teorii $PO$.
3. Niech $LO = PO \cup \{(\forall x,y)(R(x,y) \lor R(y,x))\}$. Pokaż, że teoria $LO$ jest kategoryczna w każdej mocy skończonej. Czy $LO$ jest kategoryczna w mocy $\aleph_0$?
4. Niech

   $$DLO = LO \cup \{(\forall x,y)((R(x,y) \land x \neq y) \to (\exists z)(R(x,z) \land R(z,y) \land x \neq z \land z \neq y))\}$$

   Pokaż, że jeśli $(A, \mathbf{R}) \models DLO$ oraz $|A| > 1$ to $|A| \geqslant \aleph_0$.

5. Czy $DLO$ jest kategoryczna w mocy $\aleph_0$?
6. Niech
$$DLO^* = DLO \cup \{\neg(\exists x)(\forall y)R(y,x), \neg(\exists x)(\forall y)(R(x,y)\} \ .$$
   Pokaż, że $DLO^*$ jest kategoryczna w mocy $\aleph_0$
7. Ile nieizomorficznych modeli ma teoria $DLO$ w mocy $\aleph_0$?

## Zadanie 229

Pokaż, że jeśli $\mathfrak{a}$ jest strukturą skończoną o skończonej sygnaturze, to $Th(\mathfrak{a})$ jest zbiorem rozstrzygalnym.

Powodzenia,
Jacek Cichoń