Egzamin z LiSF
termin pierwszy - 06.02.2025

Wariant zadań 1,2,3,4 wybierasz na podstawie metody przedstawionej na początku egzaminu. Wariant zadania 5 możesz wybrać samodzielnie.
Wszystkie odpowiedzi wymagają uzasadnienia.

Pod każdym z zadań znajduje się jedno przykładowe rozwiązanie. Oczywiście, akceptowane były dowolne inne prawidłowe rozwiązania.

Zadanie 1. Ile jest waluacji spełniających zdanie

Wariant a $(p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge (p_3 \to p_4) \wedge (p_4 \to p_5) \wedge (p_5 \wedge p_6)$?

Wariant b $(p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge (p_3 \to p_4) \wedge (p_4 \to p_5) \wedge (p_5 \vee p_6)$?

Rozwiązanie zadania (Cześć wspólna). Istnieje 6 waluacji spełniających zdanie $\psi = (p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge (p_3 \to p_4) \wedge (p_4 \to p_5)$. Są to następujące waluacje $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$, $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})$, $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1})$, $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})$, $(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})$, $(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})$.
Rozwiązanie zadania 1a. W każdej waluacji spełniającej rozważane zdanie zmienne p_5 i p_6 muszą przyjmować wartość $\mathbf{1}$. W pięciu z powyższch waluacji zdania ψ zmienna p_5 ma wartość $\mathbf{1}$. Zatem mamy łącznie 5 waluacji spełniających podaną formułę.
Rozwiązanie zadania 1b.. Załóżmy, że $val(p_6) = \mathbf{1}$. Wtedy każda z powyższych waluacji zmiennych $\{p_1, \ldots, p_5\}$ spełniających zdanie ψ jest szukaną waluacją. Mamy więc 6 waluacji. Jeśli $val(p_6) = \mathbf{0}$, to $val(p_5) = \mathbf{1}$. Jest 5 waluacji zdania ψ w których $val(p_5) = \mathbf{1}$.
Zatem łącznie mamy 5+6 $= 11$ takich waluacji.

Zadanie 2. Niech

Wariant a. $A_n = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant n\}$

Wariant b. $A_n = \{k \in \mathbb{Z} : |k| \leqslant n\}$.

Oblicz

$$\bigcup_{n \geqslant 1} (A_{n+1} \setminus A_n) \ .$$

Rozwiązanie zadania (Cześć wspólna). Zauważmy, że jeśli $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$, to

$$\bigcup_{k \geqslant 1} (A_{k+1} \setminus A_k) = \left(\bigcup_{k \geqslant 1} A_k \right) \setminus A_1 \ .$$

Uzasadnie: (1) Zdanie $x \in \bigcup_{k \geqslant 1} (A_{k+1} \setminus A_k)$ jest równoważne zdaniu $(\exists k \geqslant 1))(x \in A_{k+1} \setminus A_k)$. Niech $k_0 \geqslant 1$ będzie takie, że $x \in A_{k_0+1} \setminus A_{k_0})$. Wtedy $x \in \bigcup_{k \geqslant 1} A_k$ oraz $x \notin A_{k_0}$, więc również $x \notin A_1$. (2) Załóżmy teraz, że $x \in \left(\bigcup_{k \geqslant 1} A_k \right) \setminus A_1$. Niech k_0 będzie najmniejszą liczbą taką, że $x \in A_{k_0}$. Wtedy $k_0 > 1$ oraz $x \in A_{k_0} \setminus A_{k_0 - 1}$, więc $x \in \bigcup_{k \geqslant 1} (A_{k+1} \setminus A_k)$.

Rozwiązanie zadania 1a. Mamy $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n = (0,\infty)$ oraz $A_1 = \{1\}$. Zatem

$$\bigcup_{n\geqslant 1} (A_{n+1} \setminus A_n) = (0,\infty) \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)\ .$$

Rozwiązanie zadania 1b. Mamy $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n = \mathbb{Z}$ oraz $A_1 = \{-1,0,1\}$. Zatem

$$\bigcup_{n\geqslant 1} (A_{n+1} \setminus A_n) = \mathbb{Z} \setminus \{-1,0,1\} = \{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant -2\} \cup \{k \in \mathbb{Z} : k \geqslant 2\}\ .$$

Zadanie 3. Niech

Wariant a. $Z = \{f \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists m > n)(f(m) = 1)\}$

Wariant b. $Z = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) < f(n+1))\}$

Wyznacz moc zbioru Z.
Rozwiązanie zadania Część wspólna.. Niech $S = \{A \in P(\mathbb{N}) : |A| = \aleph_0\}$. Z wykładu wiemy, że $|S| = \mathfrak{c}$.
Rozwiązanie zadania 3a. Określamy funkcję $F : S \to Z$ wzorem $F(A) = \mathbf{1}_A$, gdzie $\mathbf{1}_A$ jest funkcją charakterystyczną zbioru A. F jest to funkcją różnowartościową, więc $\mathfrak{c} = |S| \leqslant |Z| \leqslant 3^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, więc $|Z| = \mathfrak{c}$.
Rozwiązanie zadania 3b. Dla $A \in S$ określamy indukcyjnie funkcję $f_A(0) = \min(A)$, $f_A(n+1) = \min(\{k \in A : k > f(n)\})$ (jest to rosnąca numeracja zbioru A). Funkcja $F : S \to Z$ określona wzorem $F(A) = f_A$ jest różnowartościowa, więc $\mathfrak{c} = |S| \leqslant |Z| \leqslant 3^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, więc $|Z| = \mathfrak{c}$.

Zadanie 4. Niech $X = \{1,\ldots,10\}$. Na zbiorze $\Omega = X^X$ rozważamy funkcję

Wariant a. $\Phi : X^X \to P(X)$ określoną wzorem $\Phi(f) = f[X]$

Wariant b. $\Phi : X^X \to X \times X$ określoną wzorem $\Phi(f) = (\min f[X], \max f[X])$

i następnie określamy relację równoważności $\sim$ na Ω wzorem:

$$f \sim g \leftrightarrow \Phi(f) = \Phi(g)$$

Wyznacz moc zbioru $\Omega/{\sim}$ oraz wskaż przykład selektora otrzymanego rozbicia.
Rozwiązanie zadania 4a. Zauważmy, że $\mathrm{rng}(\Phi) = P(X) \setminus \{\emptyset\}$ (przeciwdziedzina funkcji niepustej jest niepusta), zatem $|\Omega/{\sim}\,| = 2^{10} - 1 = 1023$.
Dla $A \in P(X) \setminus \{\emptyset\}$ określamy $f_A = \mathrm{id}_A \cup ((X \setminus A) \times \{\min(A)\})$. Rodzina $\{f_A : A \in P(X) \setminus \{\emptyset\}\}$ jest przykładem selektora $\Omega/{\sim}$.
Rozwiązanie zadania 4b. Zauważmy, że $\mathrm{rng}(\Phi) = \{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : 1 \leqslant k \leqslant l \leqslant 10\}$, zatem $|\Omega/{\sim}\,| = \binom{10}{2} + \binom{10}{1} = 45 + 10 = 55$.
Dla pary liczb naturalnych (k,l) takiej, że $k \leqslant l$ oraz $x \in X$ określamy

$$f_{(k,l)}(x) = \begin{cases} k : & x \leqslant k \\ l : & x > k \end{cases}$$

Rodzina $\{f_{(k,l)} : 1 \leqslant k \leqslant l \leqslant 10\}$ jest przykładem selektora rodziny $\Omega/{\sim}$.

Zadanie 5.

Wariant a. Pokaż, że nie istnieje naturalna transformacja pomiędzy funktorem zbioru potęgowego $\mathcal{P}$ a funktorem identycznościowym I. Wskazówka: rozważ zbiór dwuelementowy $X = \{a, b\}$ oraz bijekcję flip : $X \to X$.

Wariant b. Niech F będzie endofunktorem kategorii `Set`. Załóżmy, że $F(\{1\}) \neq \emptyset$. Pokaż, że istnieje naturalna transformacja $\eta : I \to F$.

Rozwiązanie zadania 5a. Niech $f = \{(a, b), (b, a)\}$. Wtedy $f : \{a, b\} \to \{a, b\}$. Załóżmy, że $\eta = (\eta_X)_{X \in Sets}$ jest naturalną transformacją z $\mathcal{P}$ do I. Wtedy $\eta_{\{a,b\}} \circ \mathcal{P}(f) = f \circ \eta_{\{a,b\}}$. Wyznaczamy wartość obu złożeń w punkcie $\{a, b\} \in P(\{a, b\})$. Ponieważ $(\mathcal{P}(f))(\{a, b\}) = \{a, b\}$, więc otrzymujemy $\eta_{\{a,b\}}(\{a, b\}) = f(\eta_{\{a,b\}}(\{a, b\}))$, co nie jest możliwe, bo nie istnieje x takie, że $f(x) = x$.

Rozwiązanie zadania 5b. Zauważmy, że funktor I jest izomorficzny z funktorem $Hom(\{1\}, \_)$. Korzystając z lematu Yonedy otrzymujemy

$$\mathcal{N}(I, F) \simeq \mathcal{N}(Hom(\{1\}, \_), F) \simeq F(\{1\}) \neq \emptyset \ ,$$

co kończy dowód.